Nombres complexes

Définition et opérations sur les nombres complexes

Théorème et définition :

Il existe un ensemble appelé ensemble de nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$
- Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$
- L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de la façon unique sous la forme $z = a+ib$, où a et b sont des réels

Conséquences

Soit $z = a+ib$, et $z' = a'+ib'$, où a, a', b, b' sont des réels. Alors

$z = z'$ si et si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$

$z = 0$ si et seulement si $a = b = 0$

z est réel si et seulement si $b = 0$

z est imaginaire si et seulement si $a = 0$

Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a+ib$ où a et b deux réels. On appelle conjugué de z le complexe noté et défini par : $\overline{z} = a-ib$.

Propriétés

* Pour tous les nombres complexes z et z', $\overline{z+z'} = \overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$

* Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} ; \overline{\left(\frac{1}{z'^n}\right)} = \frac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}, n \in \mathbb{Z}$$

* $z = \overline{z'}$ si et seulement si z est réel
* $z = -\overline{z}$ si et seulement si z est imaginaire

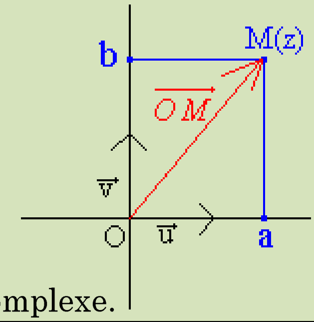
Affixe d'un point, affixe d'un vecteur :

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

- Au point M de coordonnées (a ; b) , on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
  On dit que $z = a + i\,b$ est l'affixe de M.
- Au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a ; b) , on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.

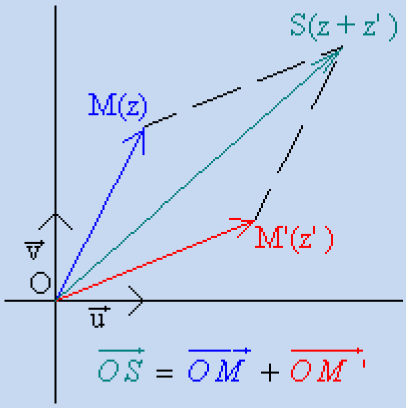
  On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de $\vec{w}$.
- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

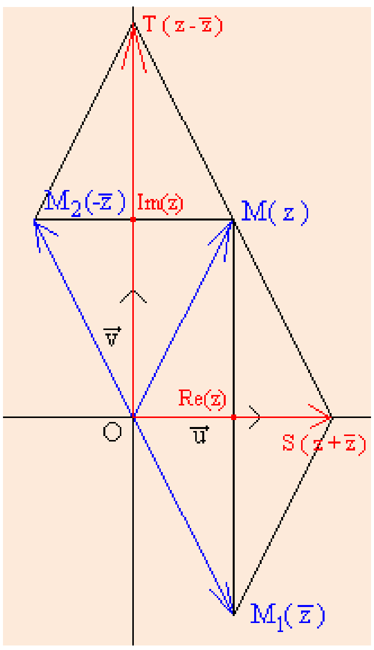


Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$.
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$.
- Le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$.
- Si $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ alors $\text{aff}(\overrightarrow{OS}) = z + z'$.
- Si $\overrightarrow{w}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{w'}$ pour affixe z',
  alors $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\,\overrightarrow{w}$ a pour affixe $k\,z$.





Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ est réel

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux si et seulement si $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w_1}}}$ est imaginair

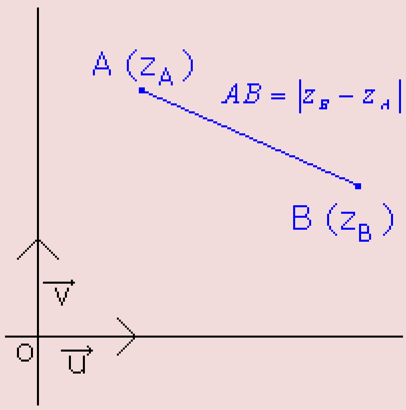
Module d'un nombre complexe :

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.
On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$.
On note $r = |z|$.

Remarques :

- La notation | z | ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
- Pour un réel x, | x | pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x" ou "module de x".
- Pour un nombre complexe non réel z , | z | sera lu impérativement "module de z".
- Si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur d'affixe z alors $\|\overrightarrow{w}\| = |z|$.
- A et B deux points 'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$.



Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z'

$|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$; $|zz'| = |z||z'|$; $|z+z'| \le |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|, k \in \mathbb{R}$ $|\overline{z}| = |z|$;

$|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$; $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}, z \neq 0$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{|1|}{|z|^n}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

Argument d'un nombre complexe non nul :

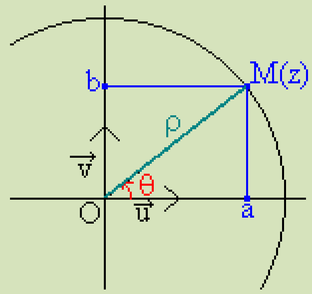
Définition :

Soit un nombre complexe non nul z de forme algébrique a+ ib et soit M le point d'affixe z.

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$\theta \equiv (\overrightarrow{u} \, \widehat{;} \, \overrightarrow{OM}) \; [2\pi]$

On note $\theta \equiv \arg(z) \; [2\pi]$.



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est à dire modulo 2π.

Propriétés :

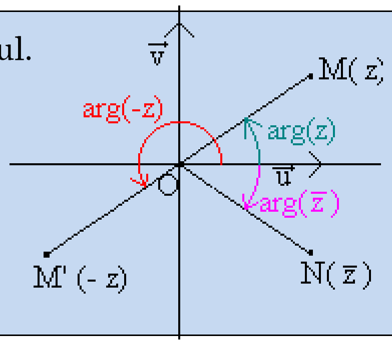
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$

$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \quad [2\pi]$

Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z) \; [2\pi]$

Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) \; [2\pi]$



Propriétés :

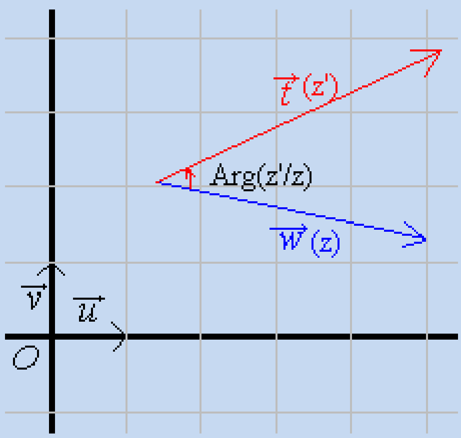
Soit deux nombres complexes non nul z et z'

$\mathrm{Arg}(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \; [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) \; [2\pi]$

$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) \; [2\pi]$

$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \; [2\pi], \; n \in \mathbb{Z}$



pour tout nombre complexe non nul z et tout entier n, $z^n = |z|^n$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$: c'ést la formule de MOIVRE.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Angles orientés et nombres complexes :

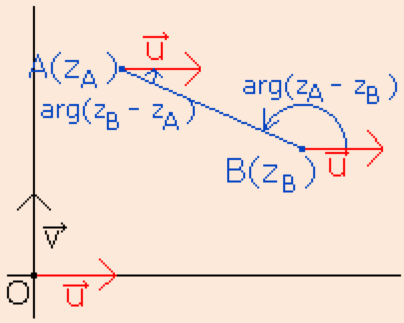
Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

Soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a :

  $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)$ $[2\pi]$.



- $\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)} \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ $[2\pi] \equiv \theta$ $[2\pi]$

Conséquence :

$\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{CD}{AB}(\cos\theta, i\sin\theta)$ avec $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)} = \theta$ $[2\pi]$

Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Notation :

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, un point M appartient au cercle trigonométrique de centre O, si et seulement s'il a pour affixe $z = e^{i\theta}$, où $\theta = \widehat{\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)}$ $[2\pi]$.

Conséquences

$e^{i0} = 1$, $e^{i\pi}$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i\pi} = -1$

Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$

Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$ et et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Propriétés

Soient deux réels θ et θ'

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme $z = r\, e^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

L'écriture $z = r\, e^{i\theta}$, $r \succ 0$ est appelé écriture exponentielle de z.

Equation $z^n = a$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$

Théorème et définition

Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ l'entier k appartenant à $\{0,1,\ldots, (n-1)\}$

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par : $z_k = e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k \in \{0,1,\ldots, n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$. Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Conséquence :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ et soit $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$

Résolution dans ℂ de l'équation $az^2+bz+c=0$; $a\neq0$

Théorème :

Soient a, b et c des nombres complexes tels que $a\neq0$, alors on a :

$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2)$, $z_1+z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Méthode de résolution dans ℂ, de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$; $a\neq0$

- Si $c=0$ (E) s'écrit $z(az+b)=0$ et admet comme solutions $z_1=0$ et $z_2 = -\dfrac{b}{a}$
- Si $b=0$ (E) s'écrit $z^2 = -\dfrac{c}{a}$ et la résolution de (E) se ramène à la recherche des racines carrées du nombre complexe $\dfrac{-c}{a}$
- Si $bc\neq0$, on détermine une racine carrée δ du discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Les solutions de (E) sont $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Théorème :

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n\neq0$; $n\geq2$

Soit $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z)=(z-z_0)g(z)$, où $g(z) = a_nz^{n-1}+b_{n-2}z^{n-2}+\ldots+b_0$, avec $b_0, b_1, \ldots, b_{n-2}$ complexes.

Nombres complexes et trigonométrie

Théorème :

Pour tout réel x et pour tout entier n

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx)+i\sin(nx)$. Formule de MOIVRE

Pour tout réel x,

$\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Formules d'Euler