Exercice n°1 : ©

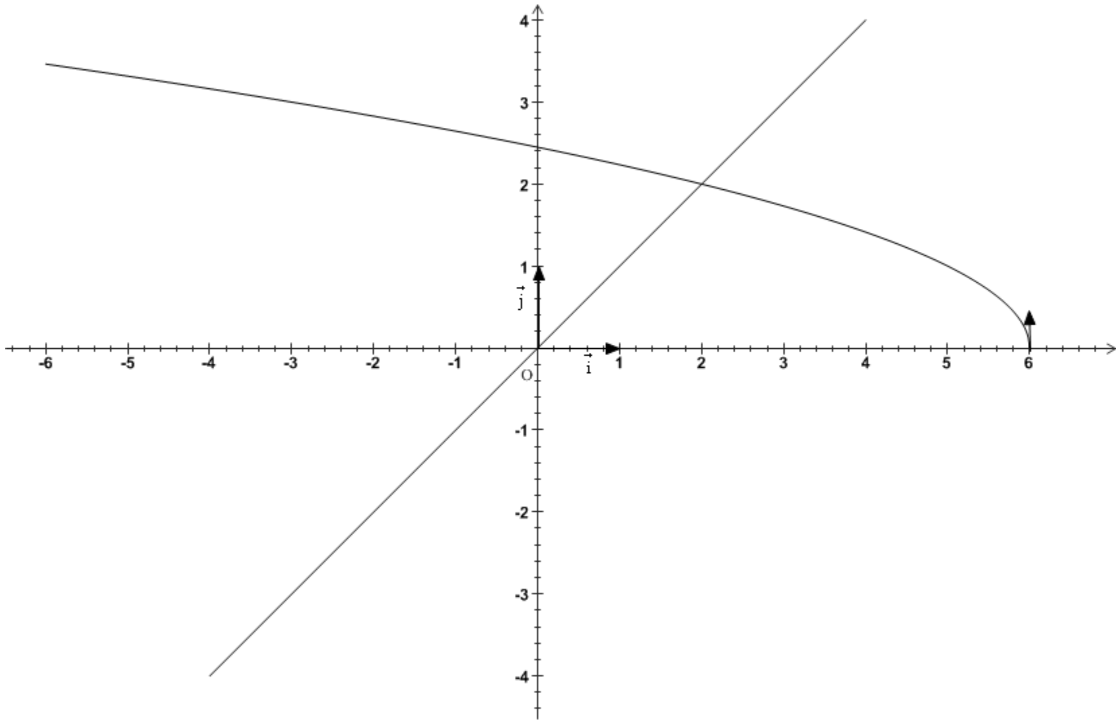
On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4+3u_n} \text{ , pour tout n } \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. a) Montrer que pour tout n de IN, $0 \le u_n < 4$.
   b) Montrer que (u_n) est strictement croissante
   c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $4 - u_{n+1} \le \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
   b) Retrouver le résultat de 1. c).

Exercice n°2 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6-u_n} \text{ , pour tout n de IN} \end{cases}$

On note f la fonction définie sur $]-\infty, 6]$ par $f(x) = \sqrt{6-x}$.
Sa courbe est représentée ci – dessous dans un repère orthonormé



1) Placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
2) Répondre par « Vrai ou Faux » aux questions suivantes, en utilisant le graphique :
   a) (u_n) est monotone ; b) $u_{2n} \le u_{2n+1}$; c) $u_{2n} \le u_{2n+2}$; d) $u_{2n+1} \le u_{2n-1}$; e) (u_n) converge vers 2.

a		b		c		d		e	
❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai	❑Faux	❑ Vrai

3) On se propose dans cette question de démontrer la convergence de la suite (u_n).

a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|u_{n+1}-2| \leq \frac{1}{2}|u_n-2|$.

b) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, on a : $|u_n-2| \leq 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 : ©

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1+\dfrac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ et $u_n \neq \sqrt{2}$.

2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} = \dfrac{1-\sqrt{2}}{1+u_n}$.

3. On pose $k = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

   Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\sqrt{2}| \leq k|u_n-\sqrt{2}|$. En déduire que la suite U converge vers $\sqrt{2}$.

4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < \dfrac{u_{n+2}-\sqrt{2}}{u_n-\sqrt{2}} < 1$.

   En déduire que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

5. Application : calculer les premiers termes de la suite U et établir les encadrements suivants de $\sqrt{2}$:

   $1 < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \sqrt{2} < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$.

Exercice n°4 :

1. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_1 \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$ et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

   b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

   (on pourra utiliser les variations de la fonction f définie sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = x(1-x)$).

   c) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = nu_n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   Montrer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle est convergente.

Exercice n°5 :

Soit (U) la suite définie sur IN* par $U_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n}{n^2+2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

1°/a- Montrer que pour tout $n \in$ IN* : $\frac{2n}{n+1} \leq U_n \leq \frac{2n+2}{n}$.

b- En déduire que (U) est convergente et calculer sa limite.

2°/a- Montrer que pour tout $n \in$ IN* : $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

b- Déduire que pour tout $n \in$ IN* : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \leq 2\sqrt{n}$.

3°/ Soit $S_n = U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n$.

a- Montrer que pour tout $n \in$ IN* : $2n - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+1}) \leq S_n \leq 2n + 2(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n})$

b- En déduire que pour tout $n \in$ IN* : $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$; puis calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°6 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in$ IN* : $U_n = (1 - \frac{1}{2n})U_{n-1}$.

1°/Montrer que pour tout $n \in$ IN : $U_n > 0$.

2°/Soit (V_n) définie sur IN par : $V_n = \sqrt{n+1}\,U_n$.

a- Exprimer : $V^2_{n+1} - V^2_n$ en fonction de n et de U^2_n.

b- Déduire que (V_n) est décroissante et que pour tout $n \in$ IN : $U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3°/ Soit (W_n) la définie sur IN par : $W_n = \sqrt{n}\,U_n$.

a- Montrer que (W_n) est croissante.

b- Déduire que pour tout $n \in IN^*$: $U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

4°/ Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5°/a- Calculer U_n en fonction de n.

b-En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$.

Exercice n°7 :

Le but de cet exercice est l'étude de la suite (S_n) définie, pour $n \geq 2$, par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

1. On pose pour $n \geq 2$: $z = e^{i\frac{\pi}{n}}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

2. Montrer que, pour $n \geq 2$: $\frac{2}{1-z} = 1 + i\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

3. En déduire que, pour $n \geq 2$: $S_n = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

4. Etudier la limite de la suite (u_n) définie, pour $n \geq 2$, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Exercice n°8 : ©

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$.

Soit D la droite munie d'un repère $(O, \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placer les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Comparer a_n et b_n. Etudier le sens de variation des suites (a_n) et (b_n).
4. Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que (v_n) est une suite constante.
6. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculer leur limite.

Exercice n°9 :

On définit deux suites u et v sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. a) Vérifier que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.$$

   b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$0 < u_n < v_n.$$

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$v_n - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

4. Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut – on déduire ?
5. On pose pour tout entier naturel n : $a_n = u_n v_n$.
   a) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   b) En calculant de deux façons différentes la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$, déterminer la limite commune ℓ des suites u et v.
6. En utilisant u_2 et v_2, donner un encadrement de ℓ par deux décimaux, d'amplitude 0.04.

Exercice n°10 : *(Contrôle 2009)* ©

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par $\begin{cases} u_0 = 0 \ ; \ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + v_n}{3} \\ v_0 = 1 \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.
4. Soit la suite (w_n) définie sur IN par $w_n = 9u_n + 5v_n$
   a) Montrer que (w_n) est une suite constante.
   b) En déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice n°11 :

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.

1. Vérifier que : $u_1 = 2$ et $v_1 = 3$, puis calculer u_2, u_3, v_2 et v_3.
2. Montrer que (u_n) est une suite strictement croissante.
3. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n \times (n+1) \times (n+1)!}$.
   b) En déduire que (v_n) est une suite strictement décroissante.
4. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $n! \geq n$.
   b) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} n!$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n \times n!}$.
   c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice n°12 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n $\geq$ *1, par :* $u_n = \dfrac{1}{n^2}$*, et on pose :*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Le but de cet exercice est l'étude de la convergence de la suite (S_n) de deux façons différentes

Partie préliminaire

1. Calculer S_1, S_2 et S_3.
2. Démontrer que la suite (S_n) est une suite croissante.

Partie 1 : Convergence de (S_n) – Méthode 1

On considère la suite (v_n), définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$, et on pose : $T_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

1. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $T_n = 2 - \dfrac{2}{n+1}$.

   b) En déduire que la suite (T_n) est une suite majorée.
2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n \leq v_n$.
3. Démontrer que la suite (S_n) converge vers un nombre réel l.

Partie 2 : Convergence de (S_n) – Méthode 2 et valeur approchée de l

On considère la suite (w_n), définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $w_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que les deux suites (S_n) et (w_n) sont adjacentes.
2. En déduire que la suite (S_n) converge vers un nombre réel l.