Suites réelles (1)

Exercice n°1 : Vrai - Faux

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

On définit les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

a. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite finie.

Exercice n°2 : Q – C – M :

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation a.	Si (u_n) est monotone décroissante et minorée et (v_n) est monotone croissante et majorée alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
Affirmation b.	Si on a $a^n < u_{n+1} - u_n < b^n$ avec a et b dans l'intervalle $]0\,;1[$ alors u_n converge.
Affirmation c.	Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et pour tout $x > 1$, on a : $f'(x) = 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$.

Exercice n°3 : Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances (ROC).

PARTIE A : QUESTION DE COURS

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a $u_n \le v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante : « Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

PARTIE B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.