Série : Les Suites Réelles

Exercice n°1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{3+u_n^2}} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$

1- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $0\le u_n \le 1$.

2 – Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > \dfrac{1+u_n}{2}$.

3 – Déduire les variations de la suite u_n.

4 – Montrer que u_n est convergente et calculer sa limite.

5- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a $0\le 1-u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(1-u_n)$, retrouver la limite de u_n.

Exercice n°2

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

1 – Montrer que (u_n) est croissante à partir du rang $n_0 = 3$.

2 – Montrer que pour $n\ge 7$ on a $u_{n+1} \ge \dfrac{2}{3}u_n$

3 – Prouver que $\forall n\ge 7$ on a $u_n > \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-7} u_7$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°3

Soit $\theta \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et on définie la suite (u_n) par: $\begin{cases} u_0 = \cos\theta \\ u_n = \cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)u_{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

1 – Calculer u_n en fonction de n et θ puis en déduire la limite de u_n.

2 – Soit la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_n = \cos\dfrac{\theta}{2}\times\cos\dfrac{\theta}{2^2}\times....\times\cos\dfrac{\theta}{2^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

montrer que $v_n = \dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}$. En déduire la limite de v_n.

Exercice n°4

1 – Soit f a fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par f(x)=x-x²

a- ontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a $f\left(\dfrac{1}{n+2}\right)\le\dfrac{1}{n+2}$.

b- Montrer que f est croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$.

2- On définie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^{\,2} \end{cases}$ i- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a: $u_n \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right]$.

ii- Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$ on a $u_n \le \dfrac{1}{n+1}$. iii- En déduire la limite de u_n.

Exercice n°5

Soient les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$; $\begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$; $w_n = u_n - v_n$.

1- Montrer que w est une suite géométrique.

2- Montrer que u est une suite croisante et que v est une suite décroissante.

3- Montrer que u et v sont deux suites bornées.

4- On considère la suite t définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $t_n = 3u_n + 8v_n$, motrer que t est une suite stationnaire.

5- En déduire que u et v sont deux suites adjassantes et calculer leur limite.

Exercice n°6

$1-$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

2- Etudier la convergence de la suite $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et celle de la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par: $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

1- Etudier les variations de f.

2- Soit la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n < u_{n+1} < 1$

b- en déduire que (u_n) est convergente.

c- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

d- En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 1|$, puis en déduire la limite de u_n.

Exercice n°8

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{3^{n+1}}} \end{cases}$

$1-$ Montrer que pour tout entier n on a: $u_n \geq 1$.

$2-$ Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3- Soit v_n la suite définie par: $v_n = u_n^2$.

a- Vérifier que $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3^{n+1}}$ et en déduire le térme générale de v_n.

b- Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice n°9

(Moyenne artyhmético-géométrique)

Soit a et b deux réels tel que 0<b<a et les suites: $(a_n) \begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$ et $(b_n) \begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjassantes.

Exercice n°10

Série de Riemann: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

1- On suppose que $\alpha=1$. Montrer que $u_{2n} \geq \frac{1}{2} + u_n$. En déduire que u_n est divergente.

2- On suppose que $\alpha = 2$. Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. En déduire que u_n est majorée par 3 et quelle est convergente

3- On suppose que $\alpha \geq 3$. Montrer que u_n converge.

Exercice n°11

Soit u_n la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1-a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $u_n \geq 1$.

b- Montrer que u_n est croissante.

c- Déduire que u_n est convergente et déterminer sa limite.

2-Soit v_n la suite définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $v_{n+1} = v_n^2$.

b- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

c- En déduire $\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice n°12

Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1-a- Etudier les variation de f.

b- Ecrire l'équation de la tengente T à (C_f) au point 0.

c- Etudier la position de T et (C_f).

2-on considère la suite définie par: $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a- Prouver que $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a $-1 < u_n < 0$.

b- Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3-a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $0 < u_{n+1} + 1 < \frac{2\sqrt{5}}{5}(u_n + 1)$

b- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $0 < u_n + 1 < \frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^n$.

c- Retrouver la limite de u_n.