arithmétique ◦

Exercice 1 :

1. Développer $(n^2+2)^2$.
2. En déduire les valeurs de l'entier naturel n tel que n^4+4 soit premier.

Exercice 2 : Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, A_n est divisible par 7.
2. Montrer que A_n n'est jamais un carré parfait.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de n, A_n admet-il exactement 2 008 diviseurs ?

Exercice 3 :
On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

Soient a, b et c trois entiers naturels.
On admettra le résultat suivant :

Si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, ..., p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = {p_1}^4 + {p_2}^4 + ... + {p_{15}}^4$ soit un nombre premier ?

Exercice 4 :

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 2 points. Chaque réponse fausse enlève 1 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
   $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$.
   A : toutes les solutions sont des entiers pairs.
   B : il n'y a aucune solution.
   C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$.
   D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$.
2. On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :
   A : $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$.
   B : p est un nombre premier.
   C : $p \equiv 4 \pmod{17}$.
   D : $p \equiv 1 \pmod{17}$.

Éléments de correction

Exercice 1 :

1. $(n^2+2)^2 = n^4+4n^2+4$.
2. $n^4+4 = (n^2+2)^2-4n^2 = (n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$.
   $n^2+2-2n > 1 \iff n^2+1-2n > 0 \iff (n-1)^2 > 0 \iff n \neq 1$
   Pour tout entier naturel n, $n^2+2+2n > 1$. Donc n^4+4 est premier si et seulement si $n = 1$.

Exercice 2 :

1. $A_n = 2^n(1+2+2^2) = 2^n \times 7$.
   Donc pour tout entier naturel n, A_n est divisible par 7.
2. La factorisation précédente de A_n est la décomposition en facteurs premiers de A_n et l'exposant de 7 est impair, donc A_n n'est jamais un carré parfait.
3. Le nombre de diviseurs positifs de A_n est $(n+1)\times 2$, donc son nombre de diviseurs (positifs ET négatifs) est $(n+1)\times 4$.
   $(n+1)\times 4 = 2\,008 \iff n+1 = 502 \iff n = 501$

Exercice 3 :

1. Tout entier est congru à -1, 0 ou 1 modulo 3. Or, p est un nombre premier supérieur ou égal à 7 donc p n'est pas un multiple de 3 donc on ne peut avoir p congru à 0 modulo 3. Donc p est congru à -1 ou à 1 modulo 3.
   Si $p \equiv -1\ (3)$ alors $p^2 \equiv 1\ (3)$ et si $p \equiv 1\ (3)$ alors $p^2 \equiv 1\ (3)$. Dans les deux cas, $p^4 \equiv 1\ (3)$ donc $p^4-1 \equiv 0\ (3)$ ce qui prouve que n est divisible par 3.
2. p est impair donc il existe un entier naturel k tel que $p = 2k+1$. Donc $p^2-1 = 4k^2+4k+1-1 = 4k^2+4k = 4k(k+1)$.
   De même, $p^2+1 = 4k^2+4k+2 = 2(2k^2+2k+1)$
   Donc $p^4-1 = (p^2-1)(p^2+1) = 8k(k+1)(2k^2+2k+1)$.
   Si k est pair, alors il existe un entier k' tel que $k = 2k'$ et donc $p^4-1 = 16k'(k+1)(2k^2+2k+1)$.
   Si k est impair, alors $k+1$ est pair et donc il existe un entier k' tel que $k+1 = 2k'$ et donc $p^4-1 = 16kk'(2k^2+2k+1)$.
   Donc n est divisible par 16.
3. modulo 5 :

$p \equiv$	0	1	2	3	4
$p^2 \equiv$	0	1	4	4	1
$p^4 \equiv$	0	1	1	1	1
$p^4-1 \equiv$	-1	0	0	0	0

   p est un nombre premier différent de 5, ce ne peut donc pas être un multiple de 5, donc on ne peut pas avoir $p \equiv 0\ (5)$ donc forcément $p^4-1 \equiv 0\ (5)$ donc 5 divise n.
4. Les entiers 5, 16 et 3 sont premiers entre eux et chacun d'eux divise n donc leur produit divise n. Donc 240 divise n.
5. Soient $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ quinze nombres premiers supérieurs ou égaux à 7.
   Alors, d'après la question précédente,
   ${p_1}^4-1 \equiv 0\ (240)$ donc ${p_1}^4 \equiv 1\ (240)$, de même ${p_2}^4 \equiv 1\ (240)$, ..., ${p_{15}}^4 \equiv 1\ (240)$.
   Donc $A \equiv 1+1+\cdots+1\ (240)$ donc $A \equiv 15\ (240)$. Donc il existe un entier k tel que $A = 15+240k = 5(3+48k)$ donc A est divisible par 15. Donc A n'est pas premier. Donc il n'existe pas quinze nombres premiers $p_1,\ p_2, ...,\ p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = {p_1}^4+{p_2}^4+...+{p_{15}}^4$ soit un nombre premier.

Exercice 4 :

1. On examine toutes les possibilités modulo 6. Réponse D
2. $1\,789 \equiv 4 \quad$ (modulo 17) donc $p \equiv 4^{2005} \quad$ (modulo 17)... Réponse C