Continuité et limites

I. Rappels

1. Continuité

Définitions (Rappels)

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+\alpha[$ $(\alpha > 0)$

f est continue à droite en a si et seulement si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a]$ $(\alpha > 0)$

f est continue à gauche en a si et seulement si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Pour étudier la continuité d'une fonction f en un point a il faut que f soit définie en a, à droite de a et à gauche de a

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f continue en a **si et seulement si** f est continue à droite et à gauche en a

Exemples

❖ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ f(1) = -3 \end{cases}$

Montrons que f est continue en 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-4) = -3$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = -3 = f(1)$ donc f est continue en 1

❖ Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si} \quad x \in [0, 2[\\ f(x) = \sqrt{x+7} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Etudions la continuité de f en 0 et 2.

- <u>Etude de la continuité en 0</u>

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2 \neq f(0)$ $\qquad (f(0) = -1)$

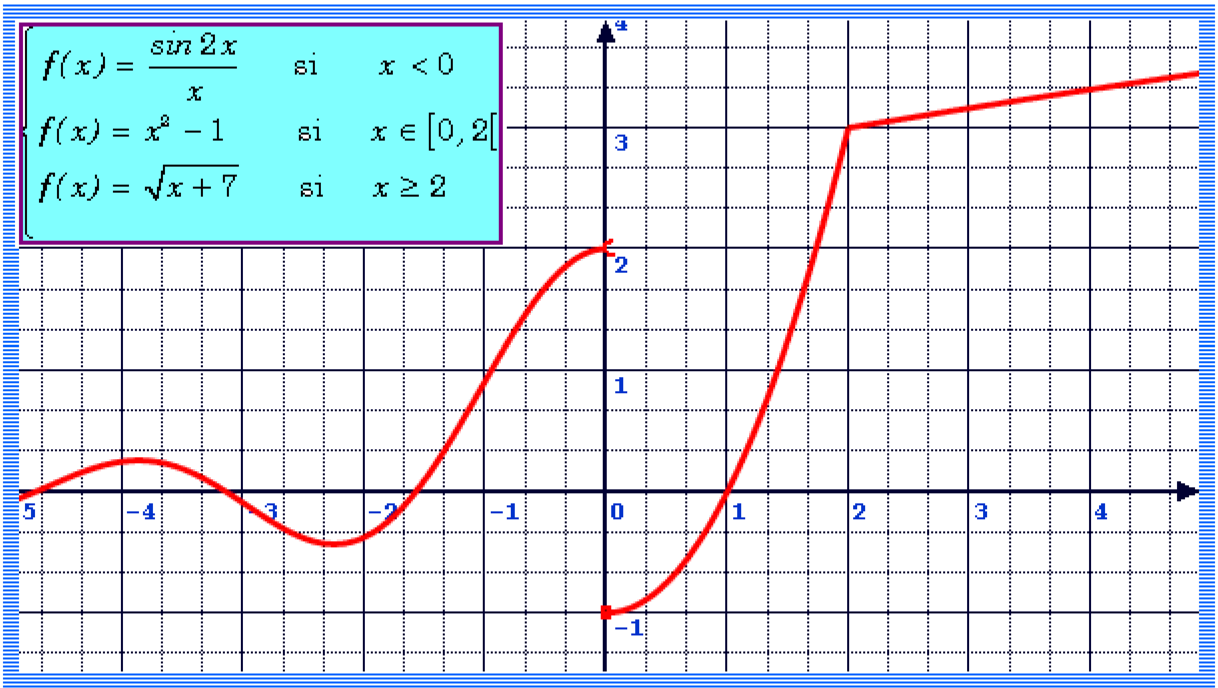
D'où f n'est pas continue à gauche en 0 et donc f n'est pas continue en 0.

- Etude de la continuité en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2 - 1) = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à gauche en 2.

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x+7} = 3 = f(2) \Rightarrow f$ est continue à droite en 2.

Conclusion : f est continue à gauche et à droite en 2 donc f est continue en 2



Opérations sur les fonctions continues

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

- *Si f est continue en a alors chacune des fonctions αf , $|f|$, f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ est continue en a.*
- *Si f et g sont continues en a alors les fonctions $f+g$ et fg sont continue en a.*
- *Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont continue en a.*
- *Si f est continue en a et positive sur l'intervalle I alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a*

- Toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout point de son domaine de définition.
- Chacune des fonctions sinus et cosinus est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
- La fonction Tangente est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ , k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Prolongement par continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si f admet une limite finie l en a alors la fonction g définie sur I par :
$g(x)=f(x)$ si $x\neq a$ et $g(a)=l$ *est continue en a*

On dit que f est prolongeable par continuité en a et que g est son prolongement par continuité en a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{1-cos(2x)}{x^2}$

Montrons que f est prolongeable par continuité en 0.
Et pour cela il faut montrer que f admet une limite finie en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} 4\,\frac{1-cos(2x)}{4x^2}=\lim_{x\to 0} 4\,\frac{1-cos(2x)}{(2x)^2}=4\times\frac{1}{2}=2$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{1-cos(2x)}{x^2}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=2$

Continuité sur un intervalle

- *Une fonction est continue sur un intervalle ouvert si elle est continue en tout point de cet intervalle.*
- *Une fonction f est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.*
- *De la même façon, on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles* $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ *et* $]-\infty,a]$

Exemple

Soit la fonction f définie sur $[0,\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{sin\,x} & \text{si } x\in\,]0,\pi[\\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0,\pi[$.

- Sur $]0,\pi[$, f est le rapport de deux fonctions continues sur $]0,\pi[$ et dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est continue sur $]0,\pi[$.
- A droite en 0, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{sin\,x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{sin\,x}{x}}=\frac{1}{1}=1=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

<u>Conclusion</u> : f est continue sur $]0,\pi[$ et continue à droite en 0 donc f est continue sur $[0,\pi[$.

2. Limites

Les résultats résumés dans les tableaux suivants concernent les opérations sur les limites en un réel a, à droite en a, à gauche en a ou à l'infini.

Lim f	*Lim g*	*Lim (f+g)*
L	L'	L+L'
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	**On ne peut pas conclure**
$-\infty$	$+\infty$	

Lim f	*Lim g*	$Lim(f \times g)$
L	L'	LL'
$L \neq 0$	∞	∞ (**RS**)
∞	∞	∞ (**RS**)
0	∞	**On ne peut pas conclure**

Lim f	*Lim g*	$Lim(\frac{f}{g})$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
∞	$L' \neq 0$	∞ (**RS**)
L	∞	0
∞	∞	**On ne peut pas conclure**
0	0	

RS : Appliquer la règle des signes
On ne peut pas conclure : Dans une telle situation, une transformation convenable de l'écriture permet le calcul de la limite.

Résultat pratiques

- La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite de son monôme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est la limite du quotient du monôme de plus haut degré du numérateur et du monôme de plus haut degré du dénominateur

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x+3) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Limites de fonctions trigonométriques

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a\quad (a\in\mathbb{R})\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{Tan x}{x}=1$$

Exercice

Déterminer la limite de $\dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$

Correction

Posons $h=x-\dfrac{\pi}{4}$, alors $x=h+\dfrac{\pi}{4}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{2}\cos\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{1-\sqrt{2}\sin\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1-\sqrt{2}\left(\cos h\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin h\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1-\sqrt{2}\left(\sin h\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos h\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h+\sin h}{1-\cos h-\sin h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1-\cos h}{h}+\frac{\sin h}{h}}{\frac{1-\cos h}{h}-\frac{\sin h}{h}}=\frac{1}{-1}=-1$$

II. Branches infinies

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$

$M(x,y)$ un point de la courbe $\mathscr{C}$

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche infinie si x ou y tend vers l'infini.

1. Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan

La droite d'équation $x=a\quad(a\in\mathbb{R})$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$

Exemple

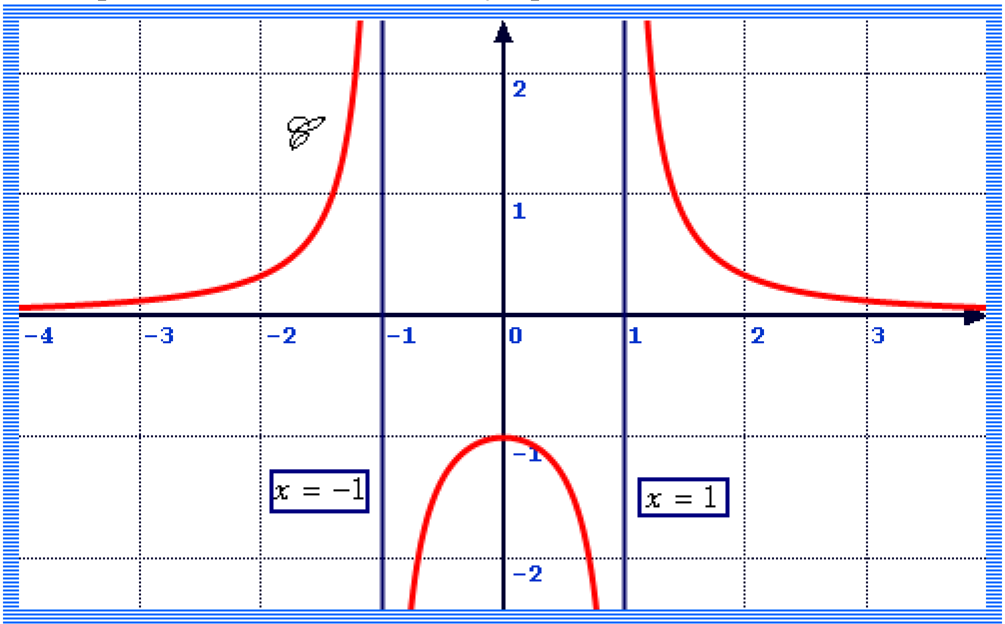
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$

On a : $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=+\infty$ (car $x-1\to 0^+$ et $x+1\to 2$).

Donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

On a aussi : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}=-\infty$ (car $x-1\to -2$ et $x+1\to 0^+$).

Donc la droite d'équation $x = -1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.



2. Asymptote parallèle à l'axe des abscisses

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan
La droite d'équation $y = b$ $(b \in \mathbb{R})$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$
si et seulement si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

Remarque

Le signe de $f(x) - b$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

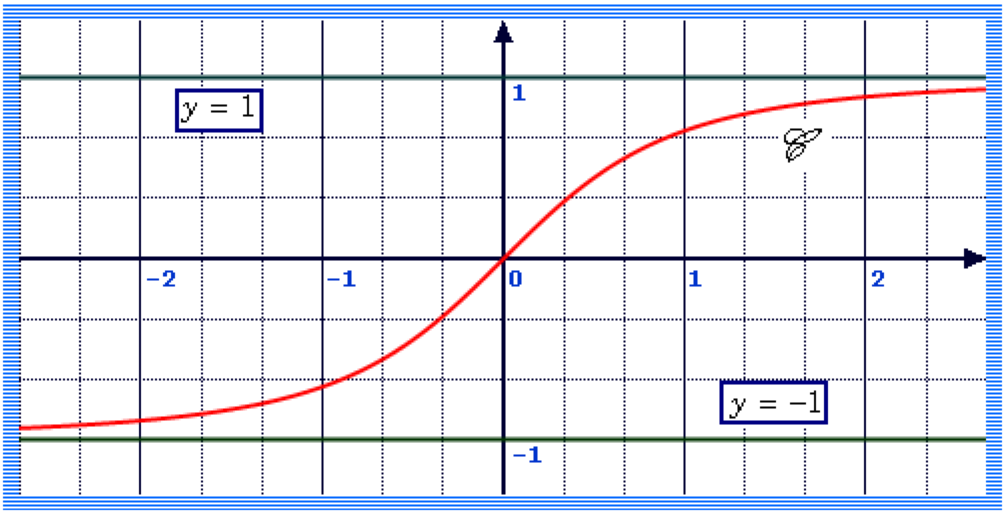
Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = 1$, donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

On a aussi : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}} = -1$

Donc la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.



3. Asymptote oblique

Soit f une fonction et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$
si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$

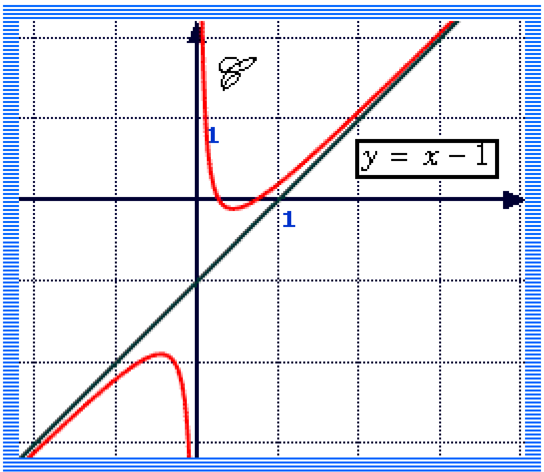
Remarque

Le signe de $f(x)-(ax+b)$ permet de déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{5x}$

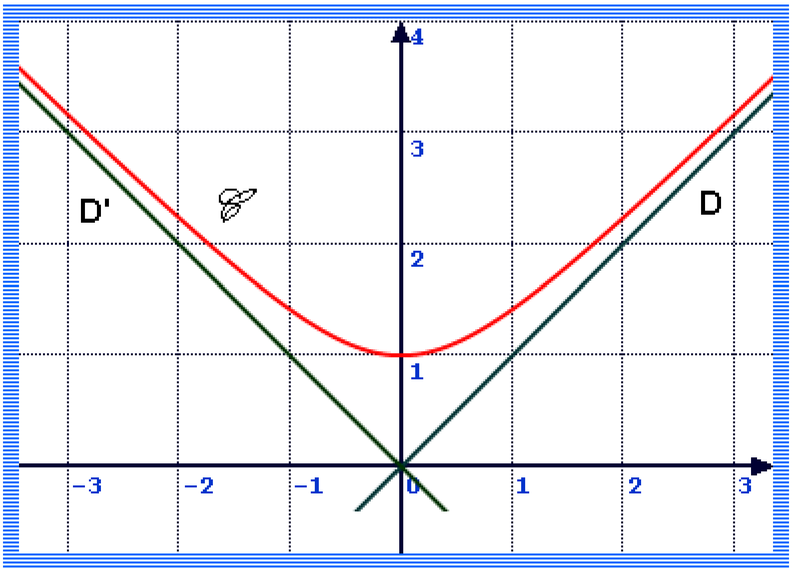
On a : $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-1) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{5x} = 0$,
donc la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$



Exemple 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
On a : pour tout réel x non nul

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$
$$=|x|+|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)$$
$$=|x|+\frac{|x|\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$
$$=|x|+\frac{1}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$



Pour $x>0$ on a : $f(x)-x=\dfrac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=0$, donc la droite D d'équation $y=x$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Pour $x<0$ on a : $f(x)+x=\dfrac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=0$, donc la droite D' d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

4. Etude d'une branche infinie dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dans ce qui suit le procédé qu'il faut suivre pour déterminer la branche infinie au voisinage de $+\infty$.

❖ Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

❖ Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$, alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une branche infinie de direction asymptotique celle de $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

❖ Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\ (a\neq 0)$, alors deux cas peuvent se présenter

- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=b\ (b\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ alors la courbe $\mathscr{C}$ admet une direction asymptotique celle de la droite d'équation $y=ax$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque
Dans le cas où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\pm\infty$, l'étude de la branche infinie se fait de la même façon.

III. Continuité et limite d'une fonction composée

1. Continuité de la composée de deux fonctions

Théorème
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.
Si f est continue en a et g continue en $f(a)$ alors la fonction gof est continue en a.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$
$|x-a| < \alpha \Rightarrow |gof(x) - gof(a)| < \varepsilon$
g est continue en $f(a)$ donc il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $y \in J$
$|y - f(a)| < \beta \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon \quad (*)$
f est continue en a donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$
$|x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \beta \qquad (**)$
soit $x \in I$ tel que $|x-a| < \alpha$ alors d'après (**) $|f(x) - f(a)| < \beta$
Et d'après (*) $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ (en prenant $y = f(x)$)
ou encore $|gof(x) - gof(a)| < \varepsilon$ **cqfd**

Conséquence

Soient f et g sont deux fonctions.

$$\begin{cases} f \text{ continue sur un intervalle I} \\ \text{g continue sur un intervalle J} \\ f(I) \subset J \end{cases} \Rightarrow gof \text{ continue sur I}$$

Remarque : Si $J = \mathbb{R}$ alors la troisième condition devient inutile.

Exercice 1

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = sin(x^2 - 3x)$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution

Posons $f(x) = x^2 - 3x$. On a : $h(x) = sin(f(x)) = (sin\, of)(x)$ donc $h = sin\, of$
La fonction f est une fonction polynôme donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.
La composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Donc h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit F la fonction définie sur $]0,2[$ par : $F(x) = Tan\left(\frac{(x-1)\pi}{2}\right)$.

Montrer que F est continue sur $]0,2[$.

Solution

Posons $f(x) = \frac{(x-1)\pi}{2}$ et $g(x) = Tanx$.

On a : Pour tout $x \in I =]0,2[$; $F(x) = Tan(f(x)) = g(f(x)) = (gof)(x) \Rightarrow F = gof$

- f est continue sur $]0,2[$ (restriction d'une fonction polynôme).
- g est continue sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
- $x \in I \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow f(x) \in J$

  Donc $f(I) \subset J$

Les trois conditions sont réalisées donc $F = gof$ est continue sur $]0,2[$

2. Limite de la composée de deux fonctions

Théorème (Admis)
Soient f et g deux fonctions.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x) = c$ (a, b et c finis ou infinis)

Exercice

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de $h(x)$ quand x tend vers a

1. $h(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad a = +\infty$
2. $h(x) = \frac{\cos\left((x-1)^2\right)-1}{(x-1)^4}$ $\quad a = 1$

Solution

1. Posons $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

   Pour $x \neq 0$ on a : $h(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin(f(x)}{f(x)} = g(f(x)) = (gof)(x) \Rightarrow h = gof$

   On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

   Donc d'après le théorème précédent $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} gof(x) = 1$

2. Posons $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

Pour $x \neq 0$ on a : $h(x) = \dfrac{\cos(f(x)) - 1}{(f(x))^2} = g(f(x)) = gof(x) \Rightarrow h = gof$.

On a : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} gof(x) = \dfrac{1}{2}$.

IV. Limites et ordre

Théorème (Rappel)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$ I.
On a l'implication suivante :

$$\begin{cases} f \text{ admet une limite l en a } (l \in \mathbb{R}) \\ \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\},\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad l \geq 0$$

Démonstration

Supposons que $l < 0$

On pose $\varepsilon = \dfrac{|l|}{2} = -\dfrac{l}{2} > 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$;

$0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Donc pour tout $x \in]a-\alpha, a+\alpha[$ et $x \neq a$ on a $|f(x) - l| < \varepsilon$

$|f(x) - l| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{l}{2} < f(x) - l < -\dfrac{l}{2} \Rightarrow f(x) < \dfrac{l}{2} < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $f(x) \geq 0$)

Donc notre supposition est fausse d'où $l \geq 0$. <u>cqfd</u>

On peut avoir $l = 0$, même si on a $f(x) > 0$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$

Théorème de compatibilité avec l'ordre

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$ I.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\} ;\ f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = l' \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $l \leq l'$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

Il suffit de considérer la fonction $h = g - f$ et appliquer le théorème précédent.

Conséquence

Soient a, b et l trois réels.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et pour tout $x \in I \setminus \{a\}$; $a \le f(x) \le b$ alors $l \in [a,b]$.

<u>Remarque</u> : On peut avoir $l = a$ ou $l = b$ même si $a < f(x) < b$ pour tout $x \in I \setminus \{a\}$.

Théorème (des gendarmes)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$I.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\} \text{ ; } f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$,

$0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in I, 0 < |x-a| < \alpha_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Donc Pour tout $x \in I, 0 < |x-a| < \alpha_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f(x)$

$\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \Rightarrow$ il existe $\alpha_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I, 0 < |x-a| < \alpha_2 \Rightarrow |g(x) - l| < \varepsilon$

Donc Pour tout $x \in I, 0 < |x-a| < \alpha_2 \Rightarrow g(x) < l + \varepsilon$

Posons $\alpha = inf(\alpha_1, \alpha_2)$

Soit $x \in I$ tel que $0 < |x-a| < \alpha$, donc $\begin{cases} 0 < |x-a| < \alpha_1 \\ 0 < |x-a| < \alpha_2 \end{cases}$ (car $\alpha \le \alpha_1$ et $\alpha \le \alpha_2$)

D'où $l - \varepsilon < f(x)$ et $g(x) < l + \varepsilon$

En plus on a : pour tout $x \in I \setminus \{a\}$; $f(x) \le h(x) \le g(x)$ ce qui permet de dire :

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, $0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$

ou encore $0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |h(x) - l| < \varepsilon$ **<u>cqfd</u>**

Exercice

Soit la fonction f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{2x + \cos x}$

1) Montrer que pour tout réel $x \ge 1$; $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x-1}$.
2) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Solution

1) On sait que pour tout réel $x \ge 1$ on a : $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le -\sin x \le 1$

$-1 \le -\sin x \le 1 \Leftrightarrow x - 1 \le x - \sin x \le x + 1$

De même, on a : $-1 \le \cos x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow 2x - 1 \le 2x + \cos x \le 2x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2x+1} \le \dfrac{1}{2x + \cos x} \le \dfrac{1}{2x-1}$

Pour $x \ge 1$ on a :

$$\begin{cases} 0 \le x - 1 \le x - \sin x \le x + 1 \\ 0 < \dfrac{1}{2x+1} \le \dfrac{1}{2x + \cos x} \le \dfrac{1}{2x-1} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \frac{x+1}{2x-1}$$

2) On a : $\begin{cases} \text{Pour tout réel } x \ge 1 \text{ ; } \dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x-1} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Donc d'après le théorème précédent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$

Conséquence

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$ I.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, |g(x)| \le f(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \infty$

Exemple

Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|\sin x| \le 1$ donc $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \le \dfrac{1}{|x|}$

Et puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$, on peut conclure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$ I.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\}, \ f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > 1 > 0$

On a : $\begin{cases} \forall x \in I \cap \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\setminus \{a\}, 0 < \dfrac{1}{g(x)} \le \dfrac{1}{f(x)} \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$. En plus $g(x) > 0$ dans $I \cap \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\setminus \{a\}$

Donc $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$. **cqfd**

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I sauf peut être en un point a$\in$ I.

Si on a : $\begin{cases} \text{Pour tout } x \in I \setminus \{a\},\ f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Ce résultat reste valable lorsque $x \to a^+$, $x \to a^-$ ou $x \to \infty$

Démonstration

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty \Rightarrow$ Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in I, 0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow g(x) < -1 < 0$

On a : $\begin{cases} \forall x \in I \cap \left]a - \alpha, a + \alpha\right[\setminus \{a\},\ \dfrac{1}{g(x)} \le \dfrac{1}{f(x)} < 0 \Rightarrow 0 < -\dfrac{1}{f(x)} \le -\dfrac{1}{g(x)} \\ \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0 \end{cases}$

Terminer la démonstration.

Exercice

Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$

V. Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème (Rappel)

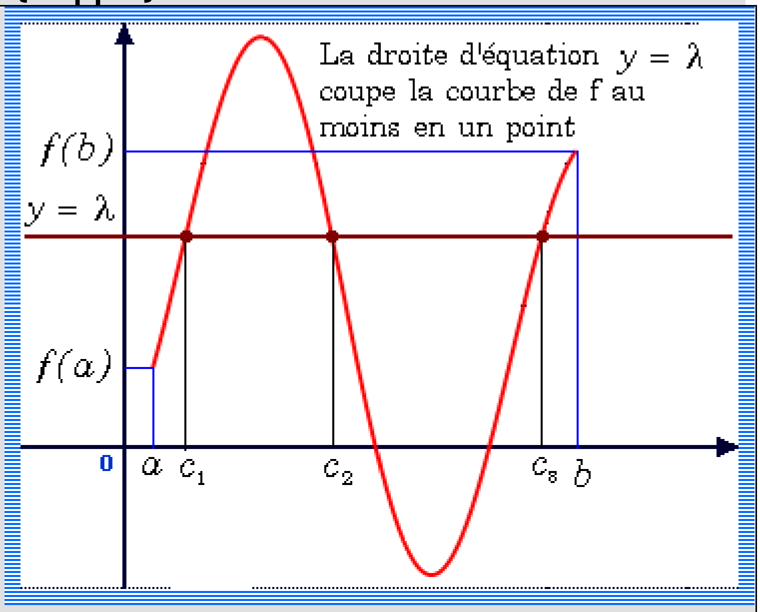
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe (au moins) un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

Cas particulier

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$.



Remarque

Si f est strictement monotone sur l'intervalle I alors c est unique.

Exercice

1) Montrer que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ admet une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$
2) Vérifier que α est la seule solution réelle de cette équation.
3) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

Posons $f(x) = x^3 + 2x + 1$

1) f continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et en particulier sur $[-1, 0]$. En plus $f(-1)\cdot f(0) = (-2)\times 1 = -2 < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $]-1, 0[$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme) et pour tout réel x on a :
$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc α est l'unique solution réelle de l'équation $f(x) = 0$.

- Calculons $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ car $\left(-\frac{1}{2}\right.$ centre de l'intervalle $\left.]-1, 0[\right)$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{8} < 0. \text{ On a : } f(0)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$$

- Calculons $f\left(-\frac{1}{4}\right)$ car $\left(-\frac{1}{4}\right.$ centre de l'intervalle $\left.\left]-\frac{1}{2}, 0\right[\right)$.

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^3 + 2\left(-\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{31}{64} > 0.$$

On a : $f\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right[$

- Calculons alors $f\left(-\frac{3}{8}\right)$ $\left(\text{car } \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8}\right)$

$$f\left(-\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{3}{8}\right)^3 + 2\left(-\frac{3}{8}\right) + 1 = \frac{-27 - 384 + 512}{512} > 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{3}{8}\right[$$

- Calculons $f\left(-\frac{7}{16}\right)$ $\left(\text{car } \frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}}{2} = -\frac{7}{16}\right)$.

$$f\left(-\frac{7}{16}\right) = \left(-\frac{7}{16}\right)^3 + 2\left(-\frac{7}{16}\right) + 1 = \frac{-343 - 3584 + 4096}{4096} > 0$$

$$f\left(-\frac{7}{16}\right)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}\right[$$

$\left(-\frac{7}{16}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} < 0,1$ donc tout réel de l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}\right[$ est une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Cette méthode est appelée **Méthode de dichotomie**

Théorème
Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I.
Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

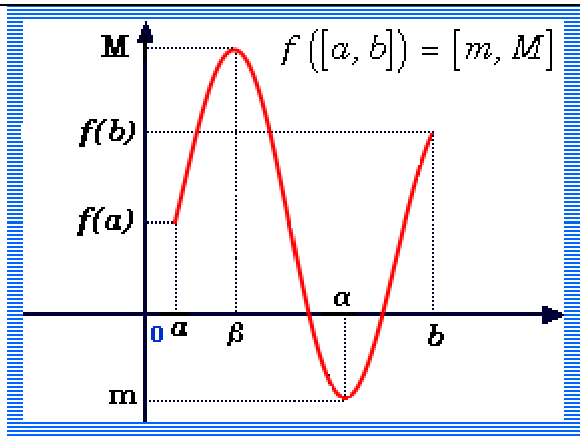
Démonstration
Supposons que f ne garde pas un signe constant sur I alors il existe deux réels a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$

$$\begin{cases} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Théorème
L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$, par une fonction continue, est un intervalle fermé borné $[m,M]$.
m est appelé le minimum de f sur $[a,b]$, on note $m = min\, f$
M est appelé le maximum de f sur $[a,b]$, on note $M = max\, f$

$m \in [m, M] = f([a, b])$
$\Rightarrow$ il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = m$
$M \in [m, M] = f([a, b])$
$\Rightarrow$ il existe $\beta \in [a,b]$ tel que $f(\beta) = M$
On dit que la fonction f est bornée et qu'elle atteint ses bornes.



VI. Image d'un intervalle par une fonction monotone

Théorème (Admis)
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b[$ (b fini ou infini).
❖ Si f est croissante et majorée sur $[a,b[$ alors f admet une limite finie en b.
❖ Si f est croissante et non majorée sur $[a,b[$ alors f tend vers $+\infty$ en b.
❖ Si f est décroissante et minorée sur $[a,b[$ alors f admet une limite finie en b.
❖ Si f est décroissante et non minorée sur $[a,b[$ alors f tend vers $-\infty$ en b.

Exercice
Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n) = n+1$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Solution

Montrons que f n'est pas majorée, pour cela il faut montrer que pour tout réel positif M, il existe $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) > \mathrm{M}$.

Soit $\mathrm{M} > 0$. Posons $x = E(\mathrm{M}) \in \mathbb{N}$ (partie entière de M)

On a $f(x) = x + 1 = E(\mathrm{M}) + 1 > M$.

f est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Images d'intervalles par une fonction monotone

Dans ce qui suit, a et b sont deux réels et f une fonction définie sur l'intervalle I.

f(I)	f croissante sur I	f décroissante sur I
$f([a,b])$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$f([a,b[)$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$
$f(]a,b])$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$f(]a,b[)$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$f([a,+\infty[)$	$\left[f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$f(]-\infty,b])$	$\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$
$f(]a,+\infty[)$	$\left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$f(]-\infty,b[)$	$\left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$

Remarque : L'image d'un intervalle par une fonction strictement monotone est un intervalle de même nature.