

Exercice n°1 : (3 points)

Voir annexe page 3, qui sera complétée et rendue avec la copie.

Exercice n°2 : (6 points)

On considère dans le plan orienté un triangle isocèle ABC de sommet principal A tel que $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [BC] et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). (Voir figure page 4).

Soit f la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

- 1) a) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$.
b) Préciser l'axe Δ de f.
- 2) Soit $B' = f(B)$.
 - a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f o f.
 - b) En déduire que $\overline{CB'} = 3\overline{CA}$. Construire le point B'.
 - c) Montrer que $BB' = BC$.
 - d) En déduire que $f(I) = J$.
- 3) Soit $S = f \circ S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$. On a représenté sa courbe (C) ainsi que la courbe (C') de la restriction de sa fonction dérivée f' sur $[0, +\infty[$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (Voir figure page 4).

- 1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
b) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$; puis dresser le tableau de variation de f.
- 2) Calculer l'aire \mathcal{A} de la partie hachurée.
- 3) a) Tracer le cercle de centre O et de rayon 1 dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
b) En utilisant des considérations d'aires, montrer que $\frac{\pi}{4} < \int_{-1}^0 \sqrt{x^3 + 1} dx < 1$.
- 4) On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit S le solide de révolution engendré par la rotation de l'arc \widehat{AB} de (C) autour de l'axe (O, \vec{i}) . Calculer le volume \mathcal{V} de S.

Exercice n°4 : (6 points)

I. Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

2) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $F(x) = x$; puis calculer la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II. Pour tout n de \mathbb{N} , on donne la fonction f_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ 2n+2 & \text{si } x = 0 \end{cases}. \text{ On pose } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et calculer u_0 .

2) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_{n+1} - u_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{2n+3}$. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} ,

$$u_n = 2 \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

3) Calculer pour $p \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^{2p} dx$. En déduire que pour tout n de \mathbb{N} , on a : $u_n = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$.

4) Montrer que pour tout n de \mathbb{N} , $\left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| \leq \frac{2}{2n+3}$. En déduire que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{2}$.

N.B : On donne : $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
--

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$

Nom et prénom :

Exercice n°1 : Q – C – M :

Chaque question comporte trois propositions. Une seule proposition est exacte. (aucune justification n'est demandée).

Question 1 :

Si f et g sont deux similitudes directes de rapports inverses et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ alors $f \circ g$ est :

- a) Un antidéplacement ; b) une translation ; c) une rotation.

Question 2 :

L'écriture complexe d'une similitude indirecte de centre $\Omega(1 + i)$, de rapport 3 et d'axe la droite $\Delta : y = -x + 2$ est

- a) $z' = 3i \bar{z} + 1 + i$; b) $z' = 3i \bar{z} + 4i + 4$; c) $z' = 3i \bar{z} - 2i + 2$.

Question 3 :

ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu du segment [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et axe Δ :

- a) $k = \frac{1}{2}$ et Δ la médiatrice de [BC]
b) $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et Δ la bissectrice intérieure de $(\overline{AB}, \overline{AI})$
c) $k = \sqrt{2}$ et Δ la médiatrice de [BC].

Question 4 :

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$ est égale à :

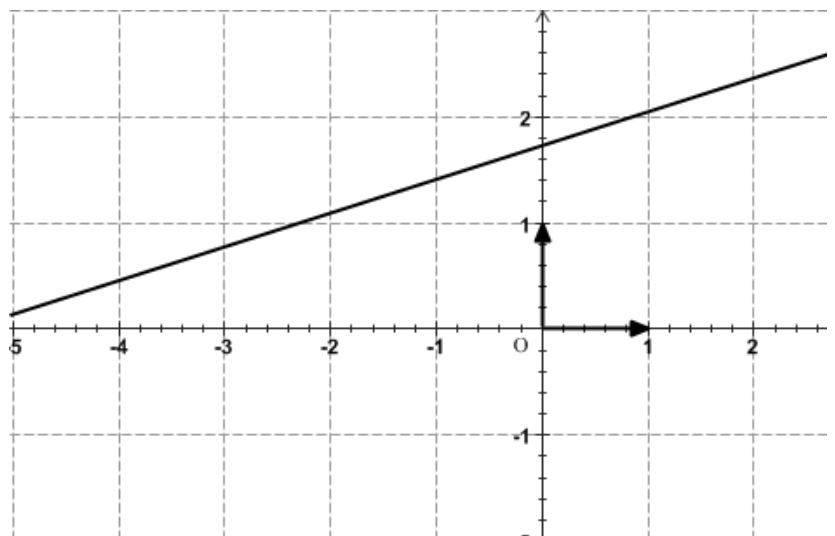
- a) $2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$; b) Zéro ; c)
 $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x dx$.

Question 5 :

La droite (D) ci - contre est la courbe d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.

- 1) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite (D), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

- a) $A = \frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$;
b) $\frac{1}{3}[f'(0) + 3f(0)]$;
c) On ne peut pas conclure.



2) Soit $\zeta = \{ M(x, y) \text{ tels que : } y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \}$.

On note S le solide obtenu par rotation de ζ autour de l'axe (Ox). Le volume V de S est égal à :

a) $\square V = \frac{\pi}{2} \left[(f'(0))^2 + 2(f(0))^2 + 2f(0)f'(0) \right]$

b) $\square V = \frac{\pi}{3} \left[(f'(0))^2 + 3(f(0))^2 + 3f(0)f'(0) \right]$

c) \square On ne peut pas conclure.

Figure de l'exercice n°2 :

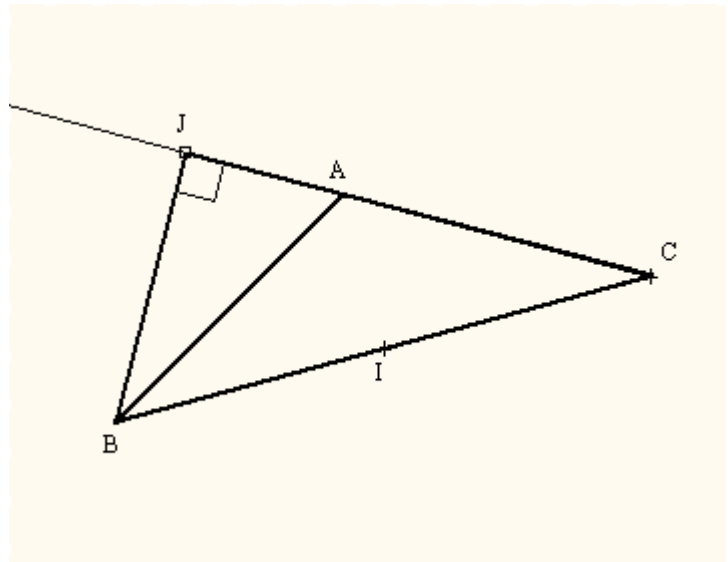
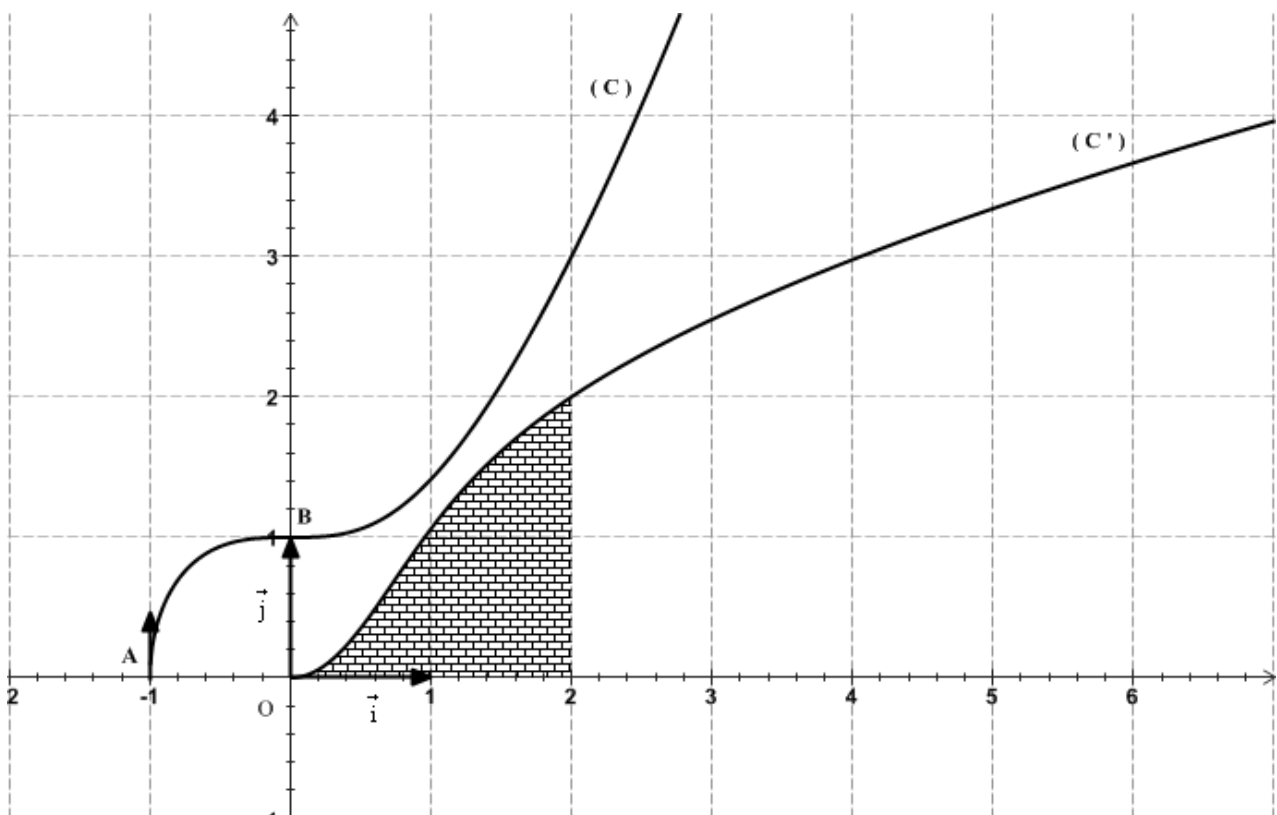


Figure de l'exercice n°3 :



Devoir de contrôle n°2

<http://afimath.jimdo.com/>

4^{ème} Maths 1

4 février 2009

Durée : 2 H

Corrigé

Exercice n°1 : Q – C – M :

Question 1 :

Si f et g sont deux similitudes directes de rapports inverses et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ alors $f \circ g$ est une similitude

directe de rapport 1 et d'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

$\Rightarrow f \circ g$ est un déplacement d'angle $\frac{3\pi}{2} \neq 2k\pi \Rightarrow f \circ g$ est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$

- a) Un antidéplacement ; b) une translation ; c) une rotation.

Question 2 :

L'écriture complexe d'une similitude indirecte de centre $\Omega(1+i)$, de rapport 3 et d'axe la droite $\Delta : y = -x + 2$ est

- a) $z' = 3i\bar{z} + 1 + i$; b) $z' = 3i\bar{z} + 4i + 4$; c) $z' = 3i\bar{z} - 2i + 2$.

En effet : $z' = a\bar{z} + b$ tel que $1 + i = a(1 - i) + b$ (Ω point invariant)

De plus si on prend un point $M(2, 0)$ de Δ , on aura $\overline{\Omega M'} = 3\overline{\Omega M}$

$\Rightarrow z' = 2a + b$ et $z' - (1 + i) = 3(2 - 1 - i) \Rightarrow 2a + b = 4 - 2i$

D'où le système $\begin{cases} (1-i)a + b = 1+i \\ 2a + b = 4 - 2i \end{cases} \Rightarrow a = -3i$ et $b = 4 + 4i$

Question 3 :

ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu du segment [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et axe Δ :

- a) $k = \frac{1}{2}$ et Δ la médiatrice de [BC]
b) $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et Δ la bissectrice intérieure de $(\overline{AB}, \overline{AI})$
c) $k = \sqrt{2}$ et Δ la médiatrice de [BC].

En effet : $k = \frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ et Δ est la bissectrice intérieure de \widehat{BAI} qui est la médiatrice de [BC]

Question 4 :

L'intégrale $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$ est égale à :

a) $2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin x dx$; b) Zéro ; c) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} x^2 \sin x dx$.

En effet : $(x \mapsto x^2 \sin x)$ est impaire.

Question 5 :

La droite (D) est la courbe d'une fonction affine f dans un repère orthonormé.

1) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la droite (D), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

a) $A = \frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$; b) $\frac{1}{3}[f'(0) + 3f(0)]$; c) On ne peut pas conclure.

En effet : $f(x) = f'(0)x + f(0) \Rightarrow A = \int_0^1 [f'(0)x + f(0)] dx = \frac{1}{2} f'(0) + f(0) = \frac{1}{2}[f'(0) + 2f(0)]$

2) Soit $\zeta = \{ M(x, y) \text{ tels que : } y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \}$.

On note S le solide obtenu par rotation de ζ autour de l'axe (Ox). Le volume V de S est égal à :

a) $V = \frac{\pi}{2} [(f'(0))^2 + 2(f(0))^2 + 2f(0)f'(0)]$

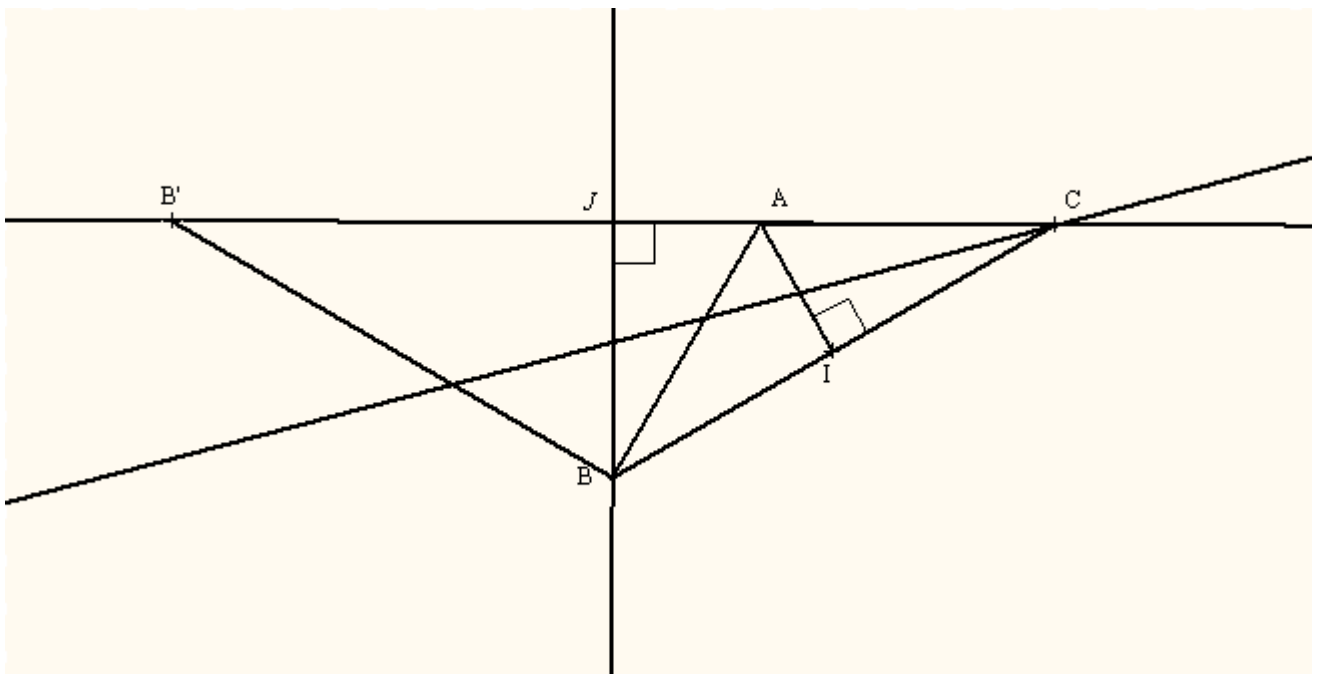
b) $V = \frac{\pi}{3} [(f'(0))^2 + 3(f(0))^2 + 3f(0)f'(0)]$

c) On ne peut pas conclure.

En effet :

$$V = \int_0^1 \pi f^2(x) dx = \pi \int_0^1 [(f'(0))^2 x^2 + 2f'(0)f(0)x + (f(0))^2] dx = \frac{\pi}{3} [(f'(0))^2 + 3(f(0))^2 + 3f(0)f'(0)]$$

Exercice n°2 :



f est la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1. a) Soit k le rapport de $f \Rightarrow k = \frac{CB}{CA} = \frac{2CI}{CA} = 2 \cos \hat{ACI} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

b) Δ est la bissectrice intérieure de $(\overline{CA}, \overline{CB})$

2. $f(B) = B'$.

a) $f \circ f$ est l'homothétie de centre C et de rapport 3.

b) $f \circ f(A) = f(B) = B' \Rightarrow h_{(C,3)}(A) = B' \Rightarrow \overline{CB'} = 3\overline{CA}$

c) $f(C) = C, f(A) = B, f(B) = B' \Rightarrow \frac{BB'}{AB} = \frac{CB}{CA} = \sqrt{3}$, or $AB = AC \Rightarrow BB' = BC$

d) $BB' = BC$ et $(BJ) \perp (CB')$ en $J \Rightarrow (BJ) = \text{méd}[CB'] \Rightarrow J$ est le milieu de $[CB']$

On a I est le milieu de $[CB]$ et f conserve le milieu $\Rightarrow f(I)$ est le milieu $[CB'] \Rightarrow f(I) = J$.

3. $S = f \circ S_{(BC)}$ est la composée de deux similitudes indirectes $\Rightarrow S$ est une similitude directe de rapport

$$\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}, \text{ de centre } S(C) = C \text{ et d'angle } (\widehat{CB}, \widehat{CB'}) \equiv (\widehat{CB}, \widehat{CA})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$$

Exercice n°3 :

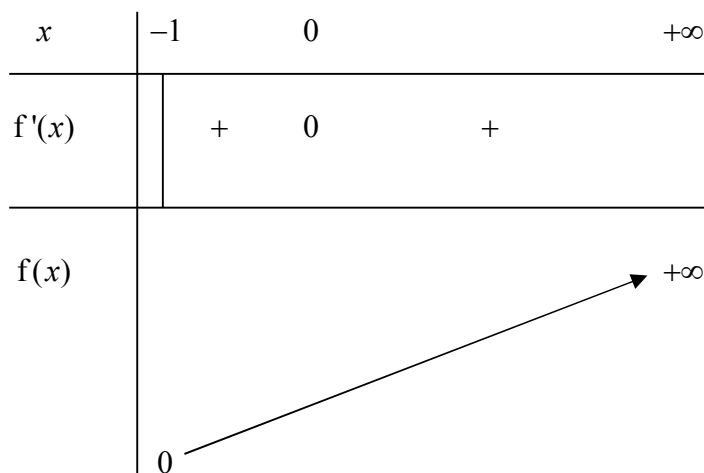
$$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$$

1. a)
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^3 + 1}{(x + 1)\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)\sqrt{x^3 + 1}}$$

a)
$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x^3 + 1}} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

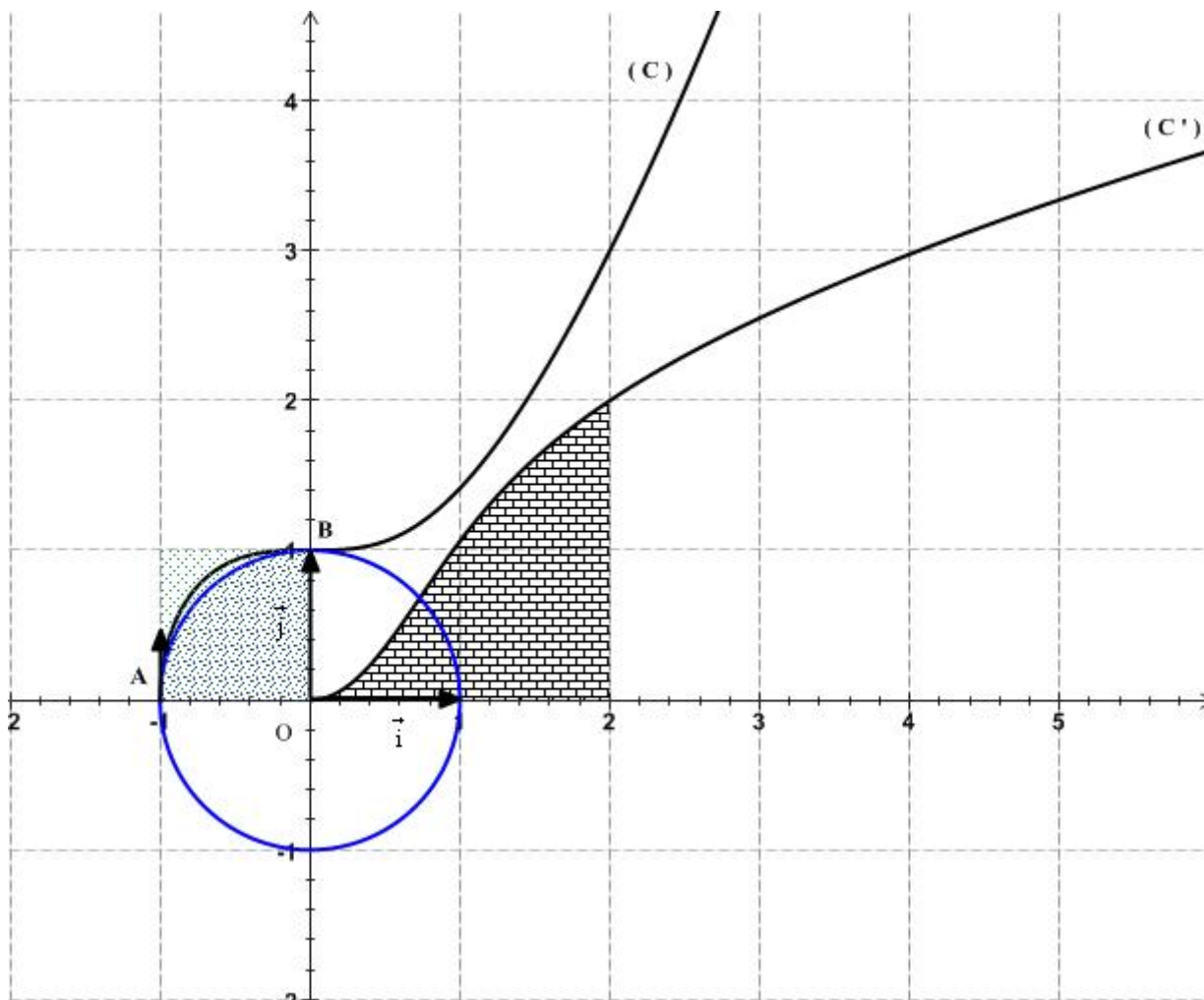
$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 0, sa courbe (C) admet une demi tangente verticale dirigée vers le haut à droite en -1 .

b) f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on a : $f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 1}} \geq 0, \forall x \in] -1, +\infty[$



$$2. \mathcal{F} = \int_0^2 f'(x) dx = f(2) - f(0) = 3 - 1 = 2 \text{ U.A}$$

3. a) Figure.



b) $\int_{-1}^0 \sqrt{x^3 + 1} dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par (C), les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ et l'axe des abscisses.

D'après le graphique cette aire est comprise entre l'aire du quart du cercle de centre O et de rayon 1 et l'aire d'un carré de côté 1

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \int_{-1}^0 \sqrt{x^3 + 1} dx < 1$$

$$4. \mathcal{V}^o = \int_{-1}^0 \pi f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^0 f^2(x) dx = \pi \int_{-1}^0 (x^3 + 1) dx = \pi \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^0 = \pi \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3\pi}{4} \text{ UV}$$

Exercice n°4 :

$$I. F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}, x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$1. \text{ Soit } \left(\varphi : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \right)$$

φ est continue sur \mathbb{R} donc φ admet au moins une primitive G sur \mathbb{R} .

$$F(x) = G(\tan x) - G(0)$$

$$\begin{cases} \left(x \mapsto \tan x \right) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\\ G \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ u \left(\left[0, \frac{\pi}{2} \right[\right) = [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow F = G \circ u - G(0) \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\text{Et on a : } F'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \varphi(\tan x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$2. F'(x) = 1, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow F(x) = x + c, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \text{ or } F(0) = \int_0^0 \varphi(t) dt = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$\Rightarrow F(x) = x, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ et par suite } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{II. } f_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} & \text{si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\\ 2n+2 & \text{si } x = 0 \end{cases}. \text{ On pose } u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx.$$

$$1. \text{ Pour que la suite } (u_n) \text{ soit bien définie, il faut que la fonction } f_n \text{ soit continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\blacktriangleright \text{ Si } x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ alors } f_n(x) = \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x}$$

$$(x \mapsto \sin(2(n+1)x)) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ en particulier sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$(x \mapsto \sin x) \text{ est continue et non nulle sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\Rightarrow f_n \text{ est continue sur } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2(n+1)x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} = 2(n+1) = 2n+2 = f_n(0)$$

$$\Rightarrow f_n \text{ est continue à droite en } 0$$

$$\text{Ainsi } f_n \text{ est continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \text{ et par suite la suite } (u_n) \text{ est bien définie.}$$

$$u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = 2 [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

2.



$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n+1}(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f_{n+1}(x) - f_n(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2(n+2)x) - \sin(2(n+1)x)}{\sin x} dx$$

Or $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\sin(2(n+2)x) - \sin(2(n+1)x)}{\sin x} = \frac{2 \sin(x) \cos((2n+3)x)}{\sin x} = 2 \cos((2n+3)x)$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos((2n+3)x) dx = \frac{2}{2n+3} \left[\sin((2n+3)x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2n+3} \left[\sin\left((2n+3)\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow = \frac{2}{2n+3} \sin\left((n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+3}$$

Red arrow $u_{k+1} - u_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{2k+3}, \forall k \in \mathbb{N}$

Pour $k=0, u_1 - u_0 = \frac{2(-1)^1}{3}$

Pour $k=1, u_2 - u_1 = \frac{2(-1)^2}{2 \times 2 + 3}$

⋮

Pour $k=n-1, u_n - u_{n-1} = \frac{2(-1)^n}{2 \times (n-1) + 3}$

On fait la somme membre à membre, on obtient :

$$u_n - u_0 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} \Rightarrow u_n = 2 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+3} \stackrel{\text{On pose } p=k+1}{=} 2 + 2 \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{2p+1} = 2 \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{2p+1}$$

3. $\int_0^1 x^{2p} dx = \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2p+1}$

$$u_n = 2 \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{2p+1} = 2 \sum_{p=0}^n \int_0^1 (-1)^p x^{2p} dx = 2 \int_0^1 \sum_{p=0}^n (-1)^p x^{2p} dx = 2 \int_0^1 \sum_{p=0}^n (-x^2)^p dx = 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$$

N.B : $\sum_{p=0}^n (-x^2)^p = \frac{1 - (-x^2)^{n+1}}{1+x^2} = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$

$$\begin{aligned}
 & \left| u_n - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| = \left| 2 \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx - 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right| = \left| 2(-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx \right| \\
 4. & \quad = 2 \underbrace{\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx}_{\geq 0} \stackrel{\text{Car } \frac{1}{1+x^2} \leq 1}{\leq} 2 \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{2}{2n+3}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{2n+3} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

<http://afimath.jimdo.com/>