

Exercice n°1 : (3 points)

Recopier la seule bonne réponse et sans justification.

Question 1 : a) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 0$ b) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ c) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = -1$

Question 2 : Soit f une similitude directe et g une similitude indirecte de même rapport 2 alors $g \circ f^{-1}$ est :

a) une similitude indirecte qui fixe un seul point b) Un antidéplacement c) identité du plan

Question 3 : Soit f une fonction bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et vérifiant $f'(x) = 1 + f^2(x)$ alors :

a) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ b) $(f^{-1})'(x) = 1+x^2$ c) $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

Exercice n°2 : (6 points)

Dans la figure ci contre, ABC et ADE sont deux triangles isocèles

et rectangle tels que : $AB = 1$, $AD = 2$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On note H le pied de l'hauteur du triangle ADC issue de A.

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et D en A.

Préciser le rapport et l'angle de f.

2. Soit I le centre de f.

a) Donner une mesure de $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IC})$ puis déduire que I appartient à (CD).

b) Déterminer $f(CD)$ puis déduire que I appartient à $f(CD)$.

c) En déduire que H est le centre de f.

3. Soit $g = f^{-1} \circ S_{\Delta}$ où S_{Δ} désigne la symétrie orthogonale d'axe Δ la médiatrice du segment [BC].

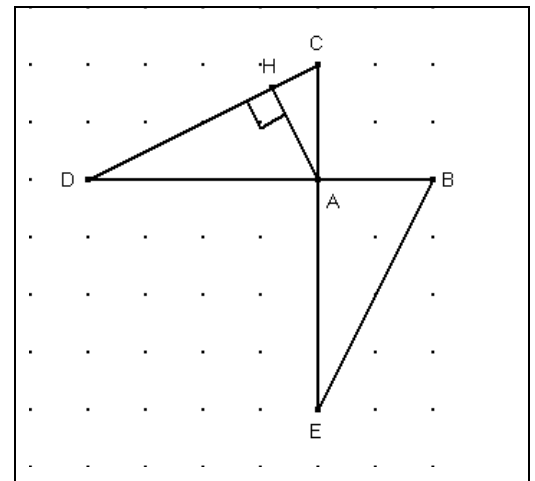
a) Déterminer $g(B)$ et $g(A)$.

b) Prouver que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

c) Soit G le symétrique de D par rapport à A.

i) Montrer que : $\overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GB}$.

j) En déduire que G est le centre de g et que (AB) est son axe.



Exercice n°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

- 1) a) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- b) Montrer que la droite $D : y = 2x$ est une asymptote à la courbe de f .
- 2) a) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur l'intervalle J .
- c) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$.
- d) Tracer dans le même repère les courbes de f et de f^{-1} avec deux couleurs différentes.

Exercice n°4: (6 points)

Soit la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2} dt$.

- 1) a) Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée.
- b) Calculer $F(0)$ puis déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a : $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$
- c) Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$
- 2) Soit la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2} dt$ pour tout $n \geq 1$.
 - a) Calculer I_1 .
 - b) Vérifier que pour tout $t \in [0,1]$ on a : $\sqrt{1-t^2} \leq 1$ puis déduire que pour tout $n \geq 1$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$
 - c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
 - d) En remarquant que : $t^{n+1} \sqrt{1-t^2} = t^n \times t \sqrt{1-t^2}$ et par une intégration par partie, montrer que pour tout $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = \left(\frac{n}{3+n}\right) I_{n-1}$.
 - e) Déduire la valeur de I_2 .

Bon travail .

Remarque : On rappelle que : $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$