

Exercice 1 : (3 points) Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 0,75 point, une réponse fausse 0 point.

Dans tout l'exercice le plan est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{i}, \vec{j})

1. L'application $f: P \rightarrow P$ est :
 $M(z) \rightarrow M'(z')$ tq $z' = -2iz + 2 - i$

A une homothétie de rapport -2

B la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{-2i}{-1+i}\right)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

C la similitude directe de centre $\Omega(-i)$ de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

2. On donne $f: P \rightarrow P$ et $g: P \rightarrow P$
 $M(z) \rightarrow M'(z')$ tq $z' = (1+i)z + 3 - i$ $M(z) \rightarrow M''(z'')$ tq $z'' = 4(-1+i)z - i$
alors fog est :

A une homothétie de rapport 8

B une homothétie de rapport (-8)

C une homothétie de rapport (-16)

3. $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3} dx =$

A $\frac{1}{16}$

B $-\frac{1}{16}$

C $\frac{3}{16}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^2 (1+2x+3x^2+\dots+(n+1)x^n) dx =$

A $2^{n+1} - 2$

B $2^{n+2} - 2$

C $2^n - 1$

Exercice 2 : (6 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle rectangle isocèle tel que $AB = AC$ et $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [AB] , [AC] et [BC]

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur B et C sur A. Caractériser f.
b. Déterminer f(J)
c. Caractériser l'application $g = r_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)} \circ t_{\vec{BO}}$.
d. Montrer que $f^{-1} \circ g$ est une translation dont on précisera le vecteur.
2. On pose $h = f \circ S_{(AC)}$.
a. Préciser h(A) et h(C).
b. Montrer que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.
3. On désigne par D le symétrique de I par rapport à A.
Soit S la similitude directe qui envoie D sur B et J sur C.
a. Montrer que S est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
b. Prouver que J est l'orthocentre du triangle BCD.
c. Soit Ω le point d'intersection des droites (CD) et (BJ). Déterminer S((BJ)) et S((CD)).
En déduire que Ω est le centre de S.

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $I = [-2, 2]$ par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Etudier la parité de f.
b. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2, interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Donner une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.
Préciser la position de Γ et T sur $[0, 2]$.
c. Tracer Γ .
3. Soit g la restriction de f à l'intervalle $J = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
a. Montrer que g est une bijection de J sur I
b. Montrer que pour tout $x \in I$ on a : $g^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{2 + \sqrt{4-x^2}}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{4-x^2} dx$.
a. Calculer U_1 .
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq 0$.
c. Montrer que (U_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente.
d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \leq \frac{2}{n+1}$, en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[: f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}$

1. a. Montrer que f est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[1, +\infty[$

b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{2}{2x^2 - 2x + 1}$

2. Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = f^{-1}\left(\frac{2x-1}{2x-2}\right) & \text{si } x > 1 \\ g(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

a. Montrer que g est continue à droite en 1.

b. Montrer que g est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que pour tout $x \in]1, +\infty[$ $g'(x) = - (f^{-1})'(x)$

c. En déduire que pour tout $x \in [1, +\infty[: g(x) + f^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Prouver alors que g est dérivable à droite en 1 et préciser $g'_d(1)$.

d. Dans le graphique ci-dessous on a représenté l'allure de la courbe Γ de f dans un repère orthonormé.

Tracer la courbe Γ' de la fonction f^{-1} ainsi que la courbe Γ'' de la fonction g à partir de celle de f dans le même repère.



Feuille à rendre

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

No :

