Devoir de contrôle N 2 **4 M**

Exercice 1 : (4 points) Répondre par vrai ou faux

1/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$

Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que z' = (1+i) $\bar{z}$ + i et $\Omega(-1)$

f est la composée de l' homothétie $h\left(\Omega,\sqrt{2}\right)$ et de la symétrie S d'axe $(O\Omega)$

2/ Toute similitude directe admet un seul point invariant

3/ $\lim_{x\to+\infty}(x\ln(x+2)-x\sqrt{x}) = -\infty$

4/ $f : x \to \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ admet un maximum en e^2 sur $]0,+\infty[$

Exercice 2 : (8 points)

On donne dans le plan orienté un triangle IFJ tel que FJ = 2 FI et $\left(\widehat{\overrightarrow{FI},\overrightarrow{FJ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit A le milieu de segment [IJ]. la perpendiculaire à (AF) en F coupe les médiatrice de [IF] et [FJ] respectivement en B et C , on pose H = J * C

1) Soit S la similitude directe qui transforme B en A et I en J.

a) Vérifier que IBA est rectangle en I et déduire l'angle de S.

b) Montrer que tg ($\widehat{IJF}$) = $\frac{IB}{IA}$ en déduire que S a pour rapport 2 .

c) Montrer que F est le centre de S

d) Déterminer S ((AB)) et déduire que S (A) = C

2/ a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui transforme J en I et C en J.

b) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera

c) Vérifier que f (H) = A

3/ a) Déterminer la nature de g = S o f

b) Montrer que g admet un centre que l'on Déterminera .

c) Préciser alors la forme réduite de g

Exercice N 3: (3 points)

1/ Etudier et tracer dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j})$ la fonction f : x → x ln (x + 1) sur [0 , +∞[

2/ Montrer que $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2} + \operatorname{Log} 2$.

3/ En déduire l'aire de la partie du plan limitée par C_f et la droite des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1

Exercice N 4: (5 points)

Soient $U_n = \int_0^1 x^n \operatorname{Log}(1+x)\,dx$ et $V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$ avec $n \in IN^*$

1/ Montrer que pour tout $n \in IN^*$ on a : $0 \le U_n \le \frac{\operatorname{Log} 2}{n+1}$ puis déterminer $\lim U_n$

2/ On pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$ avec $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a/ Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$ et que $V_n = \operatorname{Log} 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx$

b/ En déduire $\left|V_n - \operatorname{Log} 2\right| \le \frac{1}{n+2}$, puis déterminer $\lim V_n$

3/ a/ En utilisant une intégration par parties montrer que : $U_n = \frac{\operatorname{Log} 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}(\operatorname{Log} 2 - V_n)$.

b/ En déduire que la suite $((n+1)\,U_n)$ est convergente et calculer sa limite .