Devoir de contrôle N°2

Le : 08 / 02 / 10 **Durée : 2 heures** **Classe : 4M$_2$**

Exercice N°1 (5 points)

1) On considère la fonction F définie sur IR par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

a) Déterminer, en justifiant, la parité de F.

b) A l'aide de la méthode des rectangles, donner un encadrement de F(1). (prendre n = 5)

2) On considère la fonction G définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $G(x) = \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer G'(x).

b) En déduire que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a: G(x) = x.

3) ABCD est un carré de sens direct. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe de centre A qui transforme D en C.

4) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A(1 – i), B(2i), C(5 + i) et D(– 1 – i). On désigne par f la similitude directe transformant A en C et B en D.

a) Déterminer la transformation complexe associée à f .

b) En déduire alors les éléments caractéristiques de f.

Exercice N°2 (5 points)

Pour tout $n \in IN^*$, On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, dx$.

1) a) Calculer I_1.

b) Montrer que $I_2 = \frac{\pi}{4}$

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_n > 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Que peut on conclure ?

3) En intégrant par parties, montrer la relation : $(n + 2)I_{n+2} = (n + 1)I_n$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $\frac{n+1}{n+2} \le \frac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$

5) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$

Exercice N°3 **(5 points)**

Soit ABC un triangle rectangle en A et de sens direct et soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose D = r(A) et I = r^{-1}(C) et on désigne par O le milieu du segment [AD].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = B et f(B) = D

b) Caractériser f.

2) Soit t = for

a) Montrer que t est une translation dont on précisera le vecteur.

b) On pose J = t(I) . Montrer que f(C) = J.

c) Montrer que les points A, B et J sont alignés.

3) On pose K = $t_{\overrightarrow{BD}}(O)$.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que φ(A) = D et φ(O) = K.

b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

Exercice N°4 **(5 points)**

On considère l'équation (E) : 8x + 5y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.

1) a) Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E).

c) Résoudre dans ZxZ l'équation (E).

2) On considère l'équation (E') : 8x + 5y = 17.

a) Soit (x,y) une solution de (E'), quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.

b) Résoudre dans ZxZ l'équation (E').

c) Déterminer les solutions (x,y) de (E') tels que $x \wedge y = 17$ x v y = 255