

Lycée Secondaire SBH Akouda	Devoir de Contrôle N° : 2	Prof : Mr BEN SAAD Mohamed Ali
2009 - 2010		4 <sup>eme</sup> maths      Durée : 2H

Exercice 1 : ( 8 points)

I-1) Etudier le sens de variation de la fonction  $\varphi$  définie sur  $[0,1]$  par  $\varphi(t) = t(1-t)$

2) En déduire que pour tout réel  $t \in [0,1]$   $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{1}{4}$

II- On considère la fonction F définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}$

et la fonction G définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par  $G(x) = F\left(\frac{1 - \tan x}{2}\right)$

1) Vérifier que la fonction F est bien définie sur  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et déterminer sa fonction dérivée.

2) Vérifier que  $G\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F(1)$

3) Calculer  $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$

4) a- Déterminer  $G'(x)$  pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b- Démontrer que pour tout réel  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  :  $G(x) = -x + F(1) - \frac{\pi}{4}$

5) Démontrer que :  $\int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{\pi}{2}$

III- On considère la suite  $(I_n)$  définie par :  $I_0 = 1$  et

pour tout n entier naturel non nul  $I_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$

1°) Calculer  $I_1$

2°) a- Démontrer que pour tout entier naturel n  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4^n}$

b- En déduire que la suite  $(I_n)$  est convergente et déduire sa limite.

3°) On considère la suite  $(U_n)$  définie par : pour tout entier naturel non nul n

$$U_n = \sum_{k=1}^n 2^k I_k$$

a- Démontrer que pour tout réel  $t \in [0,1]$  et tout entier naturel n non nul

$$2t(1-t) + 2^2 t^2 (1-t)^2 + \dots + 2^n t^n (1-t)^n = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \frac{2^{n+1} t^{n+1} (1-t)^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1}$$

b- En déduire :

$$\text{Pour tout entier non nul n } \left| U_{n+1} - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

4°) Démontrer que la suite  $(U_n)$  est convergente et déterminer sa limite

Exercice 2: (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $(\mathcal{P})$  La parabole de foyer O et de directrice D d'équation  $x = -2$

1) a) Montrer qu'une équation cartésienne de  $(\mathcal{P})$  est  $y^2 = 4x + 4$

b) Tracer la parabole  $(\mathcal{P})$ , on désignera par S son sommet.

2) Soit le point A  $(-2, \frac{3}{2})$

a) Déterminer, par leurs équations, les tangentes à  $(\mathcal{P})$  issues de A. On notera  $T_1$  et  $T_2$  ces tangentes,  $M_1$  et  $M_2$  leurs points de contact respectifs avec  $(\mathcal{P})$ .

b) Tracer  $T_1$  et  $T_2$ , montrer qu'elles sont perpendiculaires et que les points O,  $M_1$  et  $M_2$  sont alignés.

3) Soit M un point de  $(\mathcal{P})$  d'affixe  $z = re^{i\theta}$  avec  $r \in \mathbb{R}_+^*$

a) Prouver que :  $\theta \notin 0[2\pi]$

b) Montrer que :  $r = \frac{2}{1 - \cos \theta}$

Exercice 3: (6 points)

Soit ABCD un parallélogramme de centre I tel que :  $CB = 2CD$ .

1°) Soit f la similitude indirecte qui transforme D en C et C en B.

a- Montrer que f admet un seul point invariant  $\Omega$ .

b- Vérifier que fof est une homothétie que l'on caractérisera.

c- Dédurre que  $\overrightarrow{D\Omega} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

d- Soit O le centre de gravité du triangle ACD. Montrer que  $D = \Omega * O$ . Construire  $\Omega$ .

e) Prouver que l'axe  $\Delta$  de f est la médiatrice de [OC].

2°) Soit  $g = f \circ S_{(OC)}$

a) Montrer que g est une homothétie dont on déterminera le rapport.

b) déterminer l'image de  $\Delta$  par g.

c) Montrer que le centre de g est le point d'intersection de  $\Delta$  et de (BC)

<http://afimath.jimdo.com/>