Devoir de contrôle n°2

Section :4[iéme] Maths *Durée : 2heures*

Exercice n°1(4points)

Cocher la seule réponse exacte :

1°) Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ alors la forme algébrique de z est égale à

a $\sqrt{3}+i$ b $1+i\sqrt{3}$ c $\sqrt{3}$ - i

2°) Dans l'ensemble des solutions de l'équation $z^2+z+1=0$ est :

a {-1,i} b $\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$ c $\left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$

3°) La forme exponentielle du nombre complexe z=-2-2i est

a $-2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ b $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ c $2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4°) Soient A,B,C et D quatre points distincts du plan complexe muni d'un repère orthonormé d'affixes respectives a,b,c et d U:ne mesure de l'angle $(\vec{AB},\vec{CD})$ est:

a $\arg(\frac{b-a}{c-d})$ b $\arg(\frac{b-d}{c-d})$ c $\arg(\frac{d-c}{b-a})$

5°) On considère les nombres complexes:z=2+2i , z'=2+2i$\sqrt{3}$ et $z''=\frac{z}{z'}$

La forme exponentielle du nombre complexe z'' est

a $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$ b $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}$ c $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Exercice n°2(5points)

1°) Soit $(u_n)_{n\in IN^*}$ la suite définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$.

Démontrer que cette suite est croissante.

2°) On défini la suite $(v_n)_{n\in IN^*}$ par : $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$.

Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n, $u_n \leq v_n$.

En déduire que chacune des suites (u_n) et (v_n) est convergente. On appelle ª et ª' leurs limites respectives.

4°) Démontrer que la suite $(u_n - v_n)$; n ∈ IN* converge vers 0.Conclure'.

Exercice n° 3(6points)

Le plan P est munie d'un repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A et B d'affixes respectives – 2 i et l + 3 i.

Soit l'application $f : P\setminus\{A\} \to P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que : $z' = \frac{z - 1 - 3i}{z + 2i}$.

1°) a) Soit le point D(0 ; - l). Déterminer, par sa forme algébrique, z' l'affixe de D ' tel que D ' =f(D).

b) Soit le point H(x + i) avec x un réel positif.

Montrer que: le triangle HDD' est isocèle en D si, et seulement si, x = 4.

2°) Soit E_1 = {M(z) ∈ P tels que z' réel }. Déterminer l'ensemble E_1.

3°) Soit E_2 = {M(z) ∈ P tels que | z ' | = l}.

a) Montrer que : $M(z) \in E_2 \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1$; déduire la nature de E_2.

b) Soit N(z) un point d'image par f le point N'(z').

Montrer que lorsque $N \in E_2$ le point N' appartient au cercle trigonométrique.

4°) a) Montrer que, pour tout $z \in \setminus \{-2i\}$, $(z' - 1)(z + 2i) = -1 - 5i$.

b) Déduire que $M'G \times MA = \sqrt{26}$ où G est le point d'affixe 1.

Exercice n°4(4points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1°) a) Etudier la position de la courbe (C) et la droite $\Delta : y = x$.

b) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe (C).

2°) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty ; 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) Etudier la continuité et dresser le tableau de variation de f^{-1} : fonction réciproque de f ; justifier.

c) Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

d) Montrer que les courbes (C) et (C') admettent la même tangente T en O ; tracer T.

3°) Expliciter f^{-1}.

solutions (Indication)

Exercice1 :

b/c/b/c/c

Exercice2 :

1°) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$.

2°) $v_{n+1} - v_n = -\frac{2n+1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.

3°) …

$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$; (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0…

4°) $0 \leq v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!} \leq \frac{1}{n^2}$ car $n! \geq n$.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ d'où l =l'

Les suites sont adjacentes.

Exercice3 :

$f : M(z) \sim M'(z') / z' = \frac{z - 1 - 3i}{z + 2i}$.

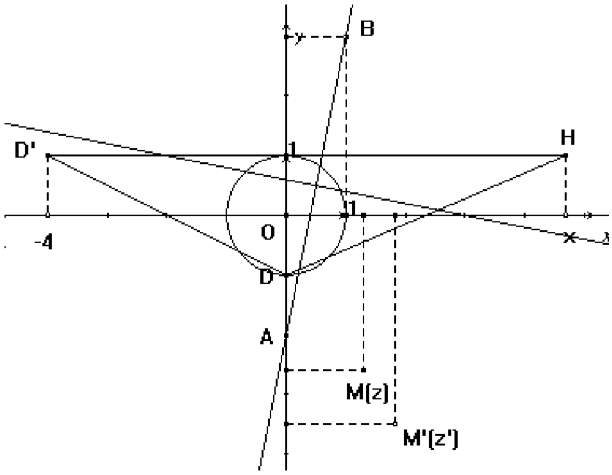
1°) a) $z' = z_{D'} = -4 + i$.

b) $H(x + i)$ $x \geq 0$.

2°) $E_1 = (AB) \setminus \{A\}$.

3°) $E_2 = \{M(z) \in P$ tels que $|z'| = 1\}$.

b) E_2 = méd [AB].



Exercice4 :

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x^2 - 3x + 3}$.

1°) a) $f(x) - x = \dfrac{-x(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 3x + 3}$.

b) $f'(x) = \dfrac{-3(x^2 - 4x + 3)}{(x^2 - 3x + 3)^2}$.

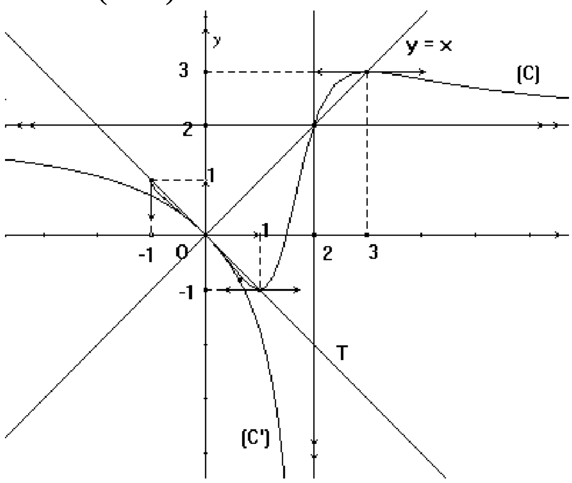
f

2°) a) $]-\infty; 1]$ $I = [-1; 2[$.

d) $T : y = -x$.

3°) a) déterminer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}\left(\dfrac{5}{7}\right)$.

b) Expliciter $f^{-1}(x) = \dfrac{3(x-1) + \sqrt{-3x^2 + 6x + 9}}{2(x-2)}$.



http://afimath.jimdo.com/