http://afimath.jimdo.com/	Devoir de synthèse N°2	
AFIF BEN ISMAIL	Mathématiques durée 3h	4 éme Sc.Exp 1 Le 05/03/2008

Exercice N°1 :(5pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé R= $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère

la sphère S d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.
et le plan P_m : $2x + y + 2z - m = 0$.

1) Déterminer les coordonnées du centre A de la sphère S ainsi que son rayon R.

2) Etudier suivants les valeurs du paramètre réel m les positions relatives de la sphère S et les plans P_m

3) On considère le plan P = P_{-5} : $2x + y + 2z + 5 = 0$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à P.

b) Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle (ζ) dont on précisera les coordonnées du centre I et le rayon r.

4) Soit D la droite dont une représentation paramétrique est D : $\begin{cases} x = t \\ y = t - 4, \quad t \in IR \\ z = -t - 2 \end{cases}$

a) Déterminer les coordonnées du point J intersection de Δ et D.

b) Calculer la distance du point J au plan P.

c) Donner une équation de la sphère S' de centre J et contenant le cercle (ζ).

Exercice N°2 :(5pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x(2 - \text{Log } x)$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire l'image de l'intervalle [1, e] par f.

2) On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \in IN \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a : $1 \leq u_n \leq e$.

b) Vérifier que $u_{n+1} - u_n = u_n(1 - Log\ u_n)$ et en déduire que (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Pour tout $n \in$ IN, on pose $V_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

a) Montrer que $V_n = 2 - Log(u_n)$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ puis retrouver la limite de la suite (U_n).

Problème :(10pts)

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé R= $(o,\vec{u},\vec{v})$. (Unité 2cm)

A)

1) a) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Montrer que f est dérivable sur IR et vérifier que f '(x) = $\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit h(x) = f(x) – x.

a) Dresser le tableau de variation de h.

b) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution $\alpha \in IR$ et vérifier que ½ < α < 1

c) En déduire la position de (ζ_f) par rapport à la droite Δ : y = x.

3) a) Montrer que le point I(0, ½) est un centre de symétrie de (ζ_f).

b) Déterminer une équation de la tangente T à (ζ_f) au point I.

B)

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J.

c) Déterminer une équation de la tangente T' à $(\zeta_{f^{-1}})$ au point d'abscisse 1/2

2) Expliciter f^{-1}(x) pour x dans J.

3) Tracer dans le repère R les droites Δ, T et T' et les courbes (ζ_f) et $(\zeta_{f^{-1}})$.

Bon travail