Bac : Sciences exp

Devoir de contrôle
n°2

Exercice 1 (2 points)

Choisir la réponse correcte.

1. $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$ est égale à :

   a) 0 b) 1 c) $+\infty$

2. Si ABC est un triangle équilatéral de coté 2 alors $\left\| \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}) \right\|$ est égale à :

   a) 0 b) $4\sqrt{3}$ c) 4

Exercice 2 (6 points)

1. a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \tan\frac{\pi}{4}x$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

   c. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f^{-1}(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

2. On pose pour tout réel $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = f^{-1}(x^2)$

   a. Montrer que φ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa fonction dérivée $\varphi'(x)$.

   b. En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$.

3. Soit $J = \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^4)^2} dx$.

   Calculer J à l'aide d'une integration par parties.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction g définie sur $[-3,3]$ par : $g(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe reprèsentative de g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que ($\mathscr{C}$) est un demi-cercle de centre $I(0,1)$ et de rayon 3.

   b. Tracer ($\mathscr{C}$) .

2. a. Montrer que g admet sur $[-3,3]$ une seule primitive G qui s'annule en -3.

   b. Hachurer la partie du plan dont l'aire est égale à $G(3)$.

   c. Calculer $G(3)$.

3. Calculer $\int_{-3}^{3} t^2 \sqrt{9-t^2} dt$.

4. On considère (I_n) la suite définie sur IN par $I_n = \int_{-3}^{3} t^{n+2} \sqrt{9-t^2} dt$.

   Trouver à l'aide d'une integration par parties une relation entre I_{n+1} et I_{n-1}.

Voir la suite au verso…

Exercice 4 (6points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(3,2,4), B(0,3,5) et C(3,1,0).

1. Montrer que ABC est un triangle et calculer son aire.
2. Soit le point E(1,m+2,-1) où m est un réel.
   a. Calculer, en fonction de m, $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AE}$
   b. En déduire la valeur de m pour que E soit un point du plan (ABC).
3. Dans la suite on prend m=2
   Soit H le projeté orthogonal du point E sur le plan (ABC).
   a. Calculer le volume du tétraèdre EABC.
   b. En déduire EH.
4. a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EH).
   c. Déterminer les coordonnées du point H.
5. Soit S la sphère dont une équation cartésienne est :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 10z + 15 = 0$$
   a. Déterminer les coordonnées du centre I et le rayon R de S.
   b. Vérifier que la droite (AI) est perpendiculaire au plan (ABC).
   c. Déterminer la position rélative du plan (ABC) et la sphère S.