http://afimath.jimdo.com/	DEVOIR DE SYNTHÈSE N° : 02	$4^{ème}$ Math 1 et 2 4 heures 02-03-2010

Exercice 1(3 points)

Dans chacune des questions suivantes il y a une seule réponse exacte, laquelle ?

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \ln^2 x =$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) 0

2) la dérivé de la fonction $g : x \longmapsto \int_x^1 \frac{\ln^2(t)}{t}dt$, $x>0$ est la fonction :

a) $x \mapsto \frac{\ln^2(x)}{x}$ b) $x \mapsto -\frac{\ln^2(x)}{x}$ c) $x \mapsto \frac{\ln^2(x) - 2\ln(x)}{x^2}$

2) Si f est une similitude directe de centre A de rapport 2 et g est une similitude indirecte de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ alors fog est :

a) Une rotation. b) Une symétrie orthogonale. c) Une symétrie glissante.

Exercice 2(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) ; $44x-5y=2$

1)a) Justifier que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

b) En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer une solution particulière de l'équation $44x-5y=1$

c)En déduire une solution particulière de l'équation $44x-5y=2$

2) On considère les entiers n, a ,b et c tels que $n=4a+2=11b+2=5c+4$

a)Montrer qu'il existe un entier p telque $a=11p$ en déduire que $44p-5c=2$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} n \equiv 2[4] \\ n \equiv 2[11] \\ n \equiv 4[5] \end{cases}$

Exercice 3(points)

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$

1) a)Calculer u_1

b)Montrer que la suite u est croissante majorée par 1.

c)Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$

En déduire que $0 \leq 1 - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ puis la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

2) En remarquant qu'on a pour tout x de [0,1], $\dfrac{x^n}{1+x^n} = x\dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et en effectuant une intégration par parties établir l'égalité

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

Exercice 4(points 5.5)

le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1)a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, Interpréter le résultat obtenu

2) Soit $g(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + \dfrac{x}{x+1}$ $x > 0$

a)Montrer que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de g

En déduire que $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) > \dfrac{1}{x+1}$ pour tout $x>0$

3)a)Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ et que pour tout $x>0$ on a $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1}$

b) Dresser le tableau de variation de f sur$[0,+\infty[$

c)Etudier la position $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$ en précisant leurs points d'intersection

d) *Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

**Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0;1[$.

Construire $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère

4) Soit α un réel tel que $0<\alpha<\dfrac{1}{e-1}$ et $A(\alpha)$ l'aire en cm² de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses est les droites d'équation $x=\alpha$ et $x = \dfrac{1}{e-1}$

a)Soit la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{2}\left[x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) + x - \ln(x+1)\right] \text{ si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Montrer que F est la primitive de f sur $[0,+\infty[$qui s'annule en 0.

b) Calculer alors $A(\alpha)$, puis déduire $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} A(\alpha)$

Exercice 5(5.5 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD telque $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$ et AB=2AD.

On désigne par I le milieu de [AB], O le milieu de [BD] et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au rectangle ABCD

1)a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui transforme A en B et I en C

b) Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera

2) Soit S la similitude directe telle que S(B)=I et S(I)=D

a) Montrer que $-\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle de S, calculer le rapport de S

b) Montrer que C est le centre de S

c) On pose E=S(A).monter que D est le milieu du segment [EI]

3)La demi- droite [CE) recoupe $\mathcal{C}$ en F

a)Calculer CE en fonction de CA et montrer que $CF = \frac{1}{\sqrt{2}}CA$

b) En déduire que F est le milieu du segment [EC] et que F=S(O)

4) Soit σ la similitude indirecte qui transforme B en I et I en D

a)Déterminer le rapport de σ

b) On note ω le centre de σ, montrer que ω est le barycentre des points pondérés (D ,1) et (B,-2)

Construire ω

5) Soit Δ l'axe de σ,

a)Construire l'axe Δ de σ
b) Déterminer σ ((BC))
c)Soit C' l'image de C par σ, montrer alors que C' est le symétrique de C par rapport à I