AS : 2009/2010
Durée : 4h

Devoir de synthèse n°2
(Bac math 1)

Exercice n°1:(3 points)
Recopier la seule bonne réponse et sans justification.

Question n°1 : le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ .On considère la conique K d'équation : $-x^2+2x+\frac{9}{4}y^2-10=0$ alors

a) K est une hyperbole d'excentricité $\frac{\sqrt{13}}{2}$ b) K est une hyperbole d'excentricité $\frac{\sqrt{13}}{3}$

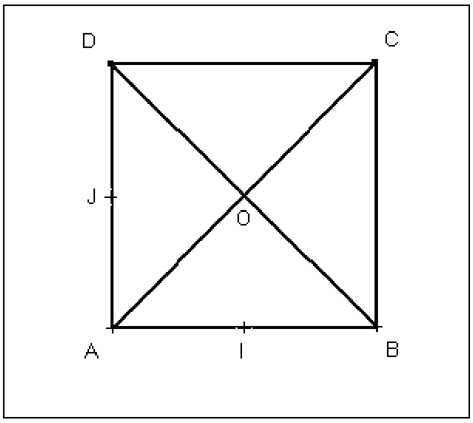
Question n°2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ égal à **:**

a) 0 b) 1 c) $+\infty$

Question n°3 : Soit la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^{\ln x} t^2dt$ alors :

a) F'(x) = $(\ln x)^2$ b) F'(x) = $(\ln x)^2-x^2$ c) F'(x) = $\frac{(\ln x)^2}{x}$

Exercice n°2 :(5 points)



Soit ABCD un carré direct de centre O et tel que AB = 1.

Soit I et J les milieux respectifs de [AB] et [AD].

On note S la similitude directe de centre Ω telle que :

S (D)=O et S(C)=I.

1) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2)a) Préciser l'image des droites (BD) et (BC) par S.

b) Préciser S (B) puis déduire que S (A) = J.

3) On munie le plan complexe par le repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

a) Préciser et sans justification les affixes de tous les points de la figure.

b) Déterminer l'expression complexe de S.

c) Déduire l'affixe de son centre Ω.

4) Soit g la similitude indirect telle que g (D)= O et g(C) = I.

a) Vérifier que g = $S_{(OI)}$ o S. ($S_{(OI)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OI)).

b) Déterminer g (B).

c) Déduire que (OB) est l'axe de g.

Exercice n°3 :(4points)

Soit la suite (I_n) définie par : $\boldsymbol{I_n}=\int_1^e(\ln x)^n\,dx$ pour tout entier naturel n ≥ 1.

1) a)Calculer I_1.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) Montre que pour tout $n \geq 1$ on a : $0 \leq \boldsymbol{I_n} \leq e-1$ .Que peut on conclure ?

2) a)En remarquant que: $(\ln x)^n = x \times \frac{1}{x}(\ln x)^n$,montrer que pour $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$ on a : $\frac{e}{n+2} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$;

c) Déduire alors $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

<u>Exercice n°4 :</u>(4 points)

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Soit (E) l'ellipse d'équation réduite: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

1) Préciser les coordonnées des foyers, des sommets de (E) et son excentricité e.

b) Construire (E).

2) pour tout réel $x \in [0, \pi]$, on considère le point $M_x(2Cosx, Sinx)$.

a) Vérifier que M_x varie sur (E) quand x varie sur $[0, \pi]$.

b) Donner les coordonnés des points M_0 et M_π .

3) Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc M_0M_π de (E) autour de $(0, \vec{i})$

a) Montrer que l'arc M_0M_π est la courbe de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}$.

b) Déduire la valeur de V.

***<u>Exercice n°5 :</u>*(4 points)**

Soit la fonction g définie sur$]0 ; +\infty[$par .$g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1) a) Étudier le sens de variation de g.

b) calculer g(1) puis déduire le signe de $g(x)$ sur $]0 ; +\infty[$.

2. Soit la fonction *f* définie sur$]0 ; +\infty[$par : $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$.

a) Etudier les variations de *f*.

b) Montrer que la droite Δ d'équation y = x est asymptote à (C) et étudier sa position par rapport à(C).

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

d) Tracer (C), Δ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

3) a)Montrer que *f* réalise une bijection de$]0 ; +\infty[$dans un intervalle J que l'on déterminera.

b) construire dans le même repère la courbe de f^{-1}.

BON TRAVAIL