

Exercice 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des trois propositions est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x^3) dx =$

- A 1
- B 0
- C 2π

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} =$

- A 0
- B $+\infty$
- C 1

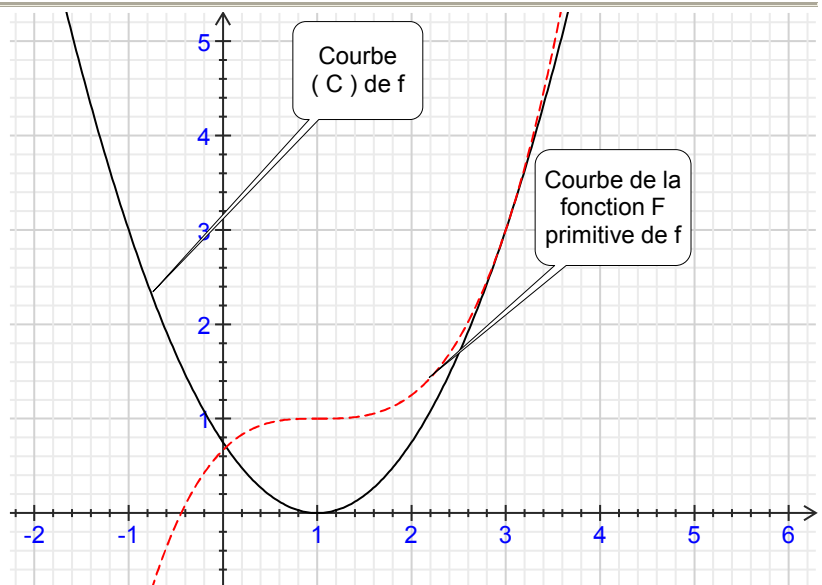
3. L'ensemble de définition de la fonction : $x \rightarrow \sqrt{1 - \ln x}$ est :

- A $]0, +\infty[$
- B $]0, e]$
- C $[1, e]$

4.

L'aire (en UA) de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites $x = 1$, $x = 3$ et $y = 0$ est égale à

- A 2
- B 1
- C 3



Exercice 2: (7 points)

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que $AC = 4$, $AB = 2$ et $\widehat{(AC, AB)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et B en A.
 - a. Déterminer l'angle et le rapport de f .
 - b. Montrer que Ω est le centre de f .
 - c. On désigne par E le symétrique de Ω par rapport à la droite (AB) et par F le symétrique de Ω par rapport à la droite (AC). Montrer que $A = E * F$ et que $f(E) = F$.
2. Soit g la similitude indirecte qui transforme E en Ω et Ω en F.
 - a. Déterminer le rapport de g . On note ω le centre de g .
 - b. Déterminer $g(\Omega)$. En déduire que ω appartient à la droite (EF).
3. a. Déterminer $g \circ f^{-1}(\Omega)$ et $g \circ f^{-1}(F)$ puis montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$
 - b. Déterminer alors $g(A)$ et $g(B)$. En déduire que ω appartient à la droite (BC).
 - c. Construire alors ω et l'axe Δ de g
4. On rapporte le plan au repère orthonormé direct (A, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{i} = \frac{1}{4} \overline{AC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.
 - a. Préciser l'affixe de chacun des points A, B et C.
 - b. Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z' . Montrer que : $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = 2iz + 4$
En utilisant la question (3.a) déduire que : $g(M) = M' \Leftrightarrow z' = -2i\bar{z} + 4$
 - c. Déterminer l'affixe de chacun des points Ω , ω ainsi qu'une équation de la droite Δ .

Exercice 3: (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x \ln(1 + x^2)$. On désigne par Γ la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R}
 - b. Préciser la tangente à Γ au point d'abscisse 0. Tracer Γ .
 - c. Tracer la courbe Γ' de la fonction f^{-1} dans le même repère.
2. a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{1+x^2}$. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$
 - b. Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe Γ et les droites $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^p}{2p+4}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $S_n(x) = x^3 - x^5 + x^7 - \dots + (-1)^n x^{2n+3}$.
 - a. Montrer que $S_n(x) = \frac{x^3}{1+x^2} + (-1)^n \frac{x^{2n+5}}{1+x^2}$.
 - b. En déduire que $U_n = I + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2} dx$
 - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+5}}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2n+6}$. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 4: (5 points)

Dans le graphique ci-dessous on a représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overline{OI}, \overline{OJ})$ en gras la courbe Γ d'une fonction f continue sur \mathbb{R} . On sait que la partie de Γ représenté sur l'intervalle $[0, 1]$ est le demi-cercle de diamètre $[OI]$.

En pointillé on a représenté la courbe de la fonction $g : x \rightarrow \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

1. Préciser le signe de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on pose $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t) dt$.
 - a. Calculer $F(1)$.
 - b. Donner une interprétation graphique de $F(e)$ puis prouver que $F(e) = \frac{\pi}{8}$.
3. a. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$ $F'(x) = \frac{f(\ln x)}{x}$
 - b. Par une simple lecture graphique prouver que pour tout $t \geq 1$ on a : $t - 1 \leq f(t) \leq t^2$
En déduire que pour tout $x \geq e$ on a : $\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln(x) \leq \int_1^{\ln x} f(t) dt \leq \frac{1}{3}(\ln x)^3$.
- c. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$.
4. a. Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$ on a : $F(x) \geq -\frac{1}{3}(\ln x)^3$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.
 - b. Dresser le tableau de variation de F . Donner l'allure de la courbe de F dans un nouveau repère.

