Exercice N°1 (4 points)

Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est correcte. Le candidat doit écrire sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la bonne réponse puis donner une justification de la réponse choisie.

1) Soit f la transformation qui à M(z) associe M'(z') telle que : $z' = 2i\bar{z} - 1 - i$ et I(1 + i).

a) f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe (OI).

b) f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe $\Delta : x + 2y - 3 = 0$

c) b) f est une similitude indirecte de rapport 2, de centre I et d'axe $\Delta : x - 2y + 1 = 0$

2) On considère l'équation (E) : $24x - 16y = 8$; où x et y sont des entiers relatifs.

a) Les solutions de (E) sont de la forme : $(x,y) = (3k + 1 ; 2k + 1)$, $k \in Z$.

b) Les solutions de (E) sont de la forme : $(x,y) = (2k + 1 ; 3k + 1)$, $k \in Z$.

c) Les solutions de (E) sont de la forme : $(x,y) = (16k + 1; 24k + 1)$, $k \in Z$.

3) On considère l'équation (E'): $x^2 + 5x - 2 \equiv 0\ [17]$

a) Les solutions de (E') sont de la forme : $x = 17k + 13$ ou $x = 17k + 8$, $k \in Z$.

b) Les solutions de (E') sont de la forme : $x = 17k - 4$ ou $x = 17k - 8$, $k \in Z$.

c) Les solutions de (E') sont de la forme : $x = 17k - 13$ ou $x = 17k + 8$, $k \in Z$.

4) Soit $N = (22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$ où n est un entier naturel, alors:

a) $N \equiv 1\ [9]$ b) N est divisible par 9 c) $N \equiv 2\ [9]$

Exercice N°2 (4 points)

On considère la suite définie sur IN* par : $U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1.

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$

c) En déduire la valeur de U_2.

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Exercice N°3 (6 points)

Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$. On désigne $I = A * B$ et $J = A * D$

On note s la similitude directe tels que s(D) = O et s(C) = I.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de s.

b) Soit Ω le centre de s. Trouver une construction géométrique de Ω.

2) a) Préciser les images respectives des droite (BD) et (BC) par s .

b) Déterminer alors s (B) et s (A) et s o s (B) .

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B , 1) et (J , 4).

3) On suppose dans cette question que $\left(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\right)$ un repère orthonormé direct du plan.

a) Déterminer l'application complexe associée à s.

b) En déduire l'affixe z_0 de Ω centre de s.

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h =R o s.

a) Préciser h (B) puis caractériser h.

b) Soit Ω' le milieu de $[\Omega B]$. Montrer que $O\Omega\Omega$' est rectangle et isocèle.

Exercice N°4 (6 points)

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \ln(\ x + \sqrt{x^2 - 1}\ )$.

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}, \vec{j}$) .

1) a. Montrer que f est définie sur $[1, +\infty[$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement.

2) a. Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3) a. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b. Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

4) a. Montrer que f est bijective et tracer, dans le même repère, la courbe ($\mathscr{C}$') de sa fonction réciproque f^{-1}.

b. Montrer que pour tout $x \in IR_+$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S le solide obtenu par la rotation de la partie de ($\mathscr{C}$') relative à [0, 1] autour de l'axe (O, $\vec{i}$). Calculer le volume de S.

6) En intégrant par parties, calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives: x = 1 et x = 2.