http://afimath.jimdo.com/	***Devoir De Synthèse N° 2***
AFIF BEN ISMAIL	***Mathématiques 4M***
	Le 02 / 03 / 2010 ***Durée 4^{H}***

Exercice N°1 : (3 points)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des affirmations suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)\, e^{(x-x^2)} = 0$.

2. Soit l'homothétie h de centre $I(\sqrt{3}\,,1)$ et de rapport -2 et soit la rotation R de centre I et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ alors l'écriture complexe de la transformation h o R est : $z' = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,\overline{z} + \frac{i}{2}$.

3. Soit f l'application du plan dans lui-même définie par ses expressions analytiques :
$\begin{cases} x' = -x + y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$ alors f est une similitude indirecte de centre A(1 , 0) et de rapport $\sqrt{2}$.

4. Soient les applications : $f : M(z) \mapsto M'\left(z' = (1-i)\,\overline{z} + 2 - i\right)$ et $g : M(z) \mapsto M'\left(z' = \frac{1+i}{2}\,\overline{z} - 2i\right.$
alors l'application f o g est un antidéplacement.

5. L'équation (E) : $91x - 119y = 5$ admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

6. Le système $\begin{cases} x \equiv y \pmod{11} \\ x \equiv y \pmod{8} \end{cases}$ est équivaut à : $x \equiv y \pmod{88}$.

Exercice N°2 : (5 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle en A et tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et

$\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\ \ ]$. On désigne par J le projeté orthogonal de A sur (BC).

1) Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et C sur A.

   a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

   b) Montrer que le centre de S est le point J.

   c) Déterminer et construire l'image B' du point B par S.

2) Soit D le point de la demi droite [AC) tel que AD = AB. On rapporte le plan P au repère orthonormé direct $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

   a) Déterminer les affixes des points A, B et C selon le repère R.

   b) Soit M un point d'affixe z du plan P et M' le point d'affixe z' tel que S(M) = M'.

   Vérifier que $z' = i\sqrt{3}\ z + 1$.

   c) Retrouver alors le rapport et l'angle de S et déterminer l'affixe du point J.

3) Soit l'application $S' = S \circ S_{(AJ)}$ où $S_{(AJ)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AJ).

   a) Montrer que S' est une similitude indirecte dont on précisera le centre et le rapport.

   b) Soit Δ l'axe de S'. Déterminer S'(A) et montrer que Δ est la médiatrice du segment [BI], où I est le point du plan défini par : $\overrightarrow{JI} = \sqrt{3}\ \overrightarrow{JA}$

Exercice N°3 : (4 points)

1) a) Déterminer suivant les valeurs de l'entier k, les restes modulo 7 de 2^k.

   b) En déduire le reste modulo 7 de $A = 8^{1001} + 2^{3004}$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{4n+2} - 4^{n+2} \equiv 0 \pmod 7$.

3) Soit l'équation (E_1) : $6x - 5y = 7$.

   a) Montrer que si (x,y) est solution de (E_1) alors $x \equiv 2 \pmod 5$.

   b) Résoudre alors l'équation (E_1).

4) Soit l'équation (E_2) : $138x - 55y = 5$ où $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   Pour tout entier n, on considère les nombres : $a = 55n + 10$ et $b = 138n + 25$.

   a) Vérifier que pour tout entier n, le couple (a,b) est solution de (E_2).

b) En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$.

c) Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $a \wedge b = 5$.

Problème : (8 points)

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \ln x\right)^2$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[e, +\infty[$.

   Montrer que g réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

   b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g^{-1}(x) = e^{\left(1+\sqrt{x}\right)}$

3) Tracer les courbes ζ_f et ${}_{g^{-1}}$ dans un même repère orthonormé du plan.

Partie B :

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \left(1 - \ln t\right)^n dt$.

1) Calculer I_1.

2) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $I_{n+1} = -1 + \left(n+1\right) I_n$.

3) On désigne par A et B les points de ζ_f d'abscisses respectives 1 et e.

   Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe ζ_f autour de l'axe $\left(O, \vec{i}\right)$.

4) Montrer que la suite I est décroissante et que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$.

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

5) On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{I_n}{n!}$.

   a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{(n+1)!}$

   b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - u_n$.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Bon Travail