Devoir de Synthèse N°2 — Mathématiques — $4^{ème}$ math — Durée : 4^h

Exercice 1 :

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la réponse exacte

1. Soit $f = S_A \circ S_d(A,3,\frac{\pi}{2})$ où A est un point du plan orienté, alors :

   a. $f = S_d(A,3,-\frac{\pi}{2})$ b. $f = S_A$ c. f = H(A,-3).

2. Soit $f = H(A,-2) \circ R(A,\frac{\pi}{3})$ où A est un point du plan orienté, alors :

   a. f = H(A,2). b. $f = S_d(A,2,\frac{-2\pi}{3})$ c. $f = S_d(A,2,\frac{\pi}{3})$

3. Soit l'entier p = $(1989)^{2008}$, alors :

   a. $p \equiv 0[2]$ b. $p \equiv 1[10]$ c. le reste modulo 7 de p est 6.

4. Soit l'entier p = $(3411)^{577}$, alors

   a. $p \equiv 1[4]$ b. $p \equiv 3[4]$ c. $p \equiv 0[4]$

5. Soit N = $(22)^{3n+2} + (13)^{3n+1}$ où n est un point du plan orienté, alors

   a. $N \equiv 1[9]$ b. $N \equiv 2[9]$ c. N est divisible par 9.

6. Soit n un entier vérifiant : $n^2 + 2n \equiv 3[7]$, alors

   a. $n \equiv 2[7]$ b. $n \equiv 3[7]$ c. $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 4[7]$

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par E et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (BC)

1.a. Soit r la rotation définie par r(B) = C et r(C) = D. Préciser l'angle et le centre de r .

b. Soit $f = r \circ S_{(OO1)}$.

Déterminer f(C) et f(B) puis caractériser f.

2. On désigne par g l'antidéplacement défini par g(D) = B et g(O) = O_1

   Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite .

3. Soit S la similitude directe telle sue S(A) = B et S(E) = C

   a. Déterminer l'angle et le rapport de S. Construire son centre Ω .

   b. Déterminer $r^{-1} \circ S(A)$, puis montrer que $r^{-1} \circ S$ est une homothétie que l'on caractérisera.

   c. Montrer que S ((CE)) = (CA) , en déduire que S(C) = O.

   d. Montrer que Ω , O et E sont alignés.

4. Soit S' la similitude directe de centre C, qui transforme B en A .

   a. Déterminer le rapport et l'angle de S'.

   b. Déterminer $S' \circ S' \circ S(E)$ puis caractériser $S' \circ S' \circ S$.

Exercice 3 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $\sqrt{2}\,i$, $-2+2i$ et $2i$.

1. On considère l'application

$$S : \begin{array}{l} P \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M_1(z_1) \quad \text{tel que } z_1 = \left(\frac{-1+i}{2}\right)z + 1 + i \end{array}$$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S.

2. Soit f la similitude directe qui transforme A en B et O en C .
   a. Montrer que pour tout point M (z), d'image M'(z') par f, on a $z' = \sqrt{2}\,iz + 2i$.
   b. En déduire les éléments caractéristiques de f.
   c. Montrer que $f \circ f$ est une homothétie que l'on caractérisera.

3.a. Déterminer l'affixe du point S(C).
   b. Montrer que $S \circ f$ est une rotation que l'on caractérisera.

Exercice 4 :

A. On considère dans le plan orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soit A(1,0) et A'(-1,0).

1. Par tout point H du segment [AA'], distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à (AA') . Δ coupe Γ en M et M', on pose H(x,0) . Montrer que l'aire du triangle AMM' est $(1-x)\sqrt{1-x^2}$
2. Soit f la fonction définie sur [-1,1] par f(x) = $(1-x)\sqrt{1-x^2}$ et (C) sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité 2 cm).
   a. Etudier la dérivabilité de f à droite en (-1) et à gauche en 1 .
   b. Etudier les variations de f et tracer (C) .
   c. Déterminer la valeur de x pour la quelle l'aire du triangle AMM' est maximale.

B. On pose $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$

g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $g(t) = \int_0^{\cos t} \sqrt{1-x^2}\,dx$

   a. Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer g'(t), en déduire que g(t) = $\frac{1}{4}(\pi - 2t + \sin 2t)$

   prouver alors que $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

   b. Calculer I_1, en déduire l'aire de la région limitée par (C)

2.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : I_n \geq 0$
   b. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et on déduire qu'elle converge.
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3.a. A l 'aide d'une intégration par partie, montrer que pour tout entier $n \geq 2 : (n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+2}.p!.(p+1)!}\pi$