http://afimath.jimdo.com/

Devoir de synthèse n°2
Mathématiques

Classe : $4M_1$ 04/03/2008 Durée : 4h

Exercice 1 **:QCM** (3 point)

Chaque question comporte trois propositions (A) , (B) et (C). Une seule proposition est exacte.
Une réponse exacte apporte 0,75 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse donne zéro point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Justifier seulement la proposition qui vous semble exacte.

N°	*Question*	*Proposition A*	*Proposition B*	*Proposition C*
1	La composée de homothétie de centre Ω rapport (-1) et de la symétrie orthogonale d'axe passant par Ω est :	translation	antidéplacement	Similitude indirecte à centre
2	L'écriture complexe de la similitude indirecte de centre $\Omega(1+i)$ de rapport 3 et d'axe la droite $\Delta : y = -x+2$ est:	$z' = 3i.\overline{z} + 1 + i$	$z' = \overline{3i.z} + 4i + 4$	$z' = 3i\overline{z} - 2i + 2$
3	La symétrie orthogonale d'axe (AB) avec $z_A = 1+i$ et $z_B = 1$, a pour écriture complexe:	$z' = (1+i).\overline{z} - 1$	$z' = -\overline{z} + 2$	$z' = (1+i).\overline{z} - i$
4	ABC est un triangle isocèle rectangle direct en A. I est le milieu de [AC]. La similitude indirecte de centre A qui transforme B en I a pour rapport k et axe (Δ)	$k = \dfrac{1}{2}$ et (Δ) la médiatrice de [BC].	$k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et (Δ) la bissectrice intérieure de $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}\right)$	$k = \sqrt{2}$ et (Δ) la médiatrice de [BC].

Exercice 2 (4 points)

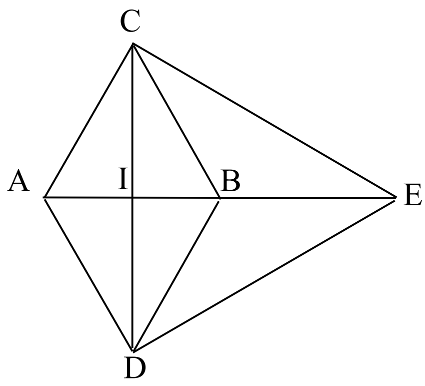
1. a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? justifier.
   b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.
   c) En déduire que $6^{40} \equiv 1[11]$ et que $6^{40} \equiv 1[5]$.
   d) Démontrer que $6^{40} - 1$ est divisible par 55.

2. Dans cette question x et y désignent des entiers relatifs.
   a) Montrer que l'équation (E) : 65 x – 40 y = 1 n'a pas de solution.
   b) Montrer que l'équation (E') : 17 x – 40 y = 1 admet au moins une solution.
   c) Déterminer à l'aide à l'aide de l'algorithme d'Euclide un couple (x_0, y_0) solution de (E').
   d) Résoudre l'équation (E').
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel n inférieur à 40 tel que : $17n \equiv 1[40]$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (5 points)

Dans la figure ci-contre, ABC , ADB et CDE sont trois triangles équilatéraux directs tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AB] .



1. Montrer que AE = 2AB.

Soit S la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ qui envoie A en B et E en D.

2. Déterminer k et vérifier que $\theta = -\frac{2\pi}{3}$.
3. On désigne par ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ACE.
 Démontrer que le transformé de ($\mathscr{C}$) par S est le cercle ($\mathscr{C}$') de diamètre [BD] et déduire que l'image du point C par S est le point J milieu de [DE].
4. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(A,\vec{u},\vec{v}\right)$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AI}$.
   a) Déterminer les affixes des points B, C , D et E.
   b) Donner la forme complexe de S et préciser l'affixe de son centre Ω.
5. Soit S' la similitude directe de centre Ω, de rapport 2 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   a) Déterminer la nature et les éléments de la transformation $S' \circ S$.
   b) Calculer l'affixe du point A' transformé de A par $S' \circ S$.

$\boxed{\text{Problème}}$ (8 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0, 2] par $f(x) = 2\sqrt{2x - x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = \left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan.

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]0,2[$ puis déterminer f' la fonction dérivée de f.
   b) Dresser le tableau de variations de f puis Tracer (C).
   c) On suppose que l'œuf d'un oiseau a la forme d'un solide de révolution obtenu par rotation de la courbe (C) autour de l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$.
   Calculer le volume $\mathscr{V}$, en unité de volume, de cet œuf.
2. Soit (C') le symétrique de (C) par rapport à la droite $\left(O,\vec{i}\right)$, on note Γ la réunion des deux courbes (C) et (C').
   a) Montrer que (Γ) a pour équation $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.
   b) Montrer que (Γ) est une ellipse dont on précisera le centre Ω, l'excentricité e et les foyers F et F'.
   c) Ecrire une équation de la tangente (T) à (Γ) en son point M_0 d'abscisse $\frac{3}{2}$ et d'ordonnée y_0 positive.

d) On note H et H' les projetés orthogonaux des foyers respectivement des foyers F et F' sur (T).
Montrer que $FH.F'H' = 1$.

3. On désigne par F la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par $F(x) = \int_0^{1+\cos x} f(t)dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ et que pour tout x de $[0,\pi]$, $F'(x) = -2\sin^2 x$.

b) Calculer $F(\pi)$ et en déduire l'expression de F(x) pour tout x de $[0,\pi]$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, de l'intérieur de l'ellipse (Γ).

4. On pose : $u_0 = 2\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}dx$ et, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 2\int_0^2 x^n\sqrt{2x-x^2}dx$.

a) Calculer $u_0 - u_1$; en déduire u_1.

b) Soit n un entier naturel non nul.
Vérifier que $u_n - u_{n+1} = \int_0^2 x^n.(2-2x)\sqrt{2x-x^2}dx$ puis montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $u_{n+1} = \left(\dfrac{2n+3}{n+3}\right)u_n$.

c) En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 (x^2-2x+3)\sqrt{2x-x^2}dx$.

d) Montrer que la suite (u_n) est croissante. En déduire que , pour tout entier n , $u_n \geq \pi$.

e) Montrer que si la suite (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$. Conclure.