Exercice n°1 : (3 points)

Choisir la lettre qui indique l'unique bonne réponse et sans justification.

1) Soit la fonction f définie sur IR par f(x) = $\sqrt{x^2+1}$.

a) f ' (x)= $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

b) f ' (x)= $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

c) f ' (x)= $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

2) Soit la fonction f définie sur par f(x) = $\sqrt{x^2+1}$

a) f est bijective de [-1, +∞ [sur [2, +∞ [et $f^{-1}(x)= \sqrt{x^2-1}$

b) f est bijective de [0, +∞ [sur [1, +∞ [et $f^{-1}(x)= -\sqrt{x^2-1}$

c) f est bijective de [0, +∞ [sur [1, +∞ [et $f^{-1}(x)= \sqrt{x^2-1}$

3) Soit f(x) = $\sqrt{x}$ avec x Є [1,+ ∞[et on suppose que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ alors pour tout x de[1,+ ∞[on a ;

a) $|x-1| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x}-1|$

b) $|\sqrt{x}-1| \leq \frac{1}{2}|x-1|$

c) $|\sqrt{x}-4| \leq \frac{1}{2}|x-1|$

Exercice : (6 points)

Soit l'équation (E_x) : $z^3 - 3iz^2 - (3+e^{i2x})\, z + i\,(1+e^{2ix}) = 0$ où x $\in [-\pi, \pi[$

1) a)Vérifier que i est une solution de (E_x).

b) Vérifier que : $z^3 - 3iz^2 - (3+e^{i2x})z + i(1+e^{2ix}) = (z - i)\,[z^2 - 2iz - (1+e^{2ix})]$.

c) Résoudre dans C l'équation (E_x).

2) Dans le plan complexe munie d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points I , M et N d'affixe respectifs : $z_I = i$, $z_M = i - e^{ix}$ et $z_N = i + e^{ix}$.

a) Montrer que I est le milieu de [MN]

b) Montrer que si x varie dans $[-\pi, \pi[$ alors M varie sur un cercle de centre I dont on déterminera son rayon.

c) En déduire l'ensemble des points N lorsque M varie sur le cercle.

3) Dans la suite on suppose que **x =0**.

a) Ecrire $\dfrac{z_M}{z_N}$ sous forme exponentielle.

b) En déduire la nature du triangle OMN.

Exercice : (5 points)

On considère les deux suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier naturel n par:

$$U_0 = 0 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}\ ,\ V_0 = 7 \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4}$$

1) On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que la suite (W_n) est géométrique de raison $\frac{5}{12}$.

2) Montrer que pour tout n Є IN: $V_n \geq U_n$.

3) Montrer que (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

5) Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

6) On considère à présent la suite (T_n) définie pour tout entier naturel n par $T_n = 3\,U_n + 4\,V_n$.

a) Démontrer que la suite (T_n) est constante et donner sa valeur.

b) En déduire la limite des suites (U_n) et (V_n).

Exercice : (6 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)= \dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

b) Etudier les variations de f.

c) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur]-1, 1[.

b) Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

c) Calculer f (1) puis calculer $(f^{-1})'\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

d) Montrer que l'équation : $f^{-1}(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans]-1, 1[et déterminer sa valeur.

e) Donner une équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point A d'abscisse x_0

3) Soit la fonction h définie sur]-1, 1[par $h(x) = f^{-1}\left(Sin(\frac{\pi}{2}x)\right)$

Montrer que h réalise une bijection de] -1,1[dans IR.

Bon travail