

<http://afimath.jimdo.com/>

Devoir de synthèse n°:1 4 Sc

MATHEMATIQUES

Le 8/12/2010 DUREE : 2 h

Exercice 1 : (4 points)

A] Dans chacune des questions suivantes une seule des trois propositions est correcte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre la réponse choisie .

- 1) Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation : $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$, alors l'autre solution est :
 - a) $i\cos\theta$
 - b) $ie^{i\theta}$
 - c) $e^{-i\theta}$
- 2) Sachant que $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[$ alors un argument de $i\cos\theta$ est :
 - a) $\frac{\pi}{2}$
 - b) $\frac{3\pi}{2}$
 - c) $\frac{\pi}{2} + \theta$.
- 3) Soit a un nombre complexe non nul. Si α est une racine carrée de a alors l'autre racine carrée de a est
 - a) $-$
 - b) $\bar{\alpha}$
 - c) i
- 4) Soit $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ alors $|1 + e^{i2\theta}|$ est :
 - a) $2\cos\theta$
 - b) $-2\cos\theta$
 - c) 2

B] Répondre par **vrai** ou **faux** .

- 1) Soit f une fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = x^2\sin(x)$.
L'équation $f'(x) = \frac{\pi}{2}$ admet au moins une solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.
- 2) Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
La courbe représentative de la fonction : $f(x) = (x - x^2)(x - 3)$ admet exactement deux tangentes horizontales.
- 3) La suite (u_n) définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ par $u_n = n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.
- 4) Soit (u_n) une suite tel que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes. Alors (u_n) est convergente.

Exercice 2 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
- 2) Etudier la monotonie de (u_n) .
- 3) On pose $f(x) = x - x^2$. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n+2}\right) \leq \frac{1}{n+3}$.
- 4) Montrer par récurrence que , pour tout n de \mathbb{N} , $0 < u_n \leq \frac{1}{n+2}$.
- 5) Déterminer alors la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1) a. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{2(\sqrt{x^2+1})^3}$.

b. Dresser le tableau de variation de f .

2) a. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour $x \in J$.

c. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(1)$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

4) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in [1, 2]$.

5) On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|$.

c. Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 4 : (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) .

1) a. Donner le module et un argument de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

b. Donner sous forme exponentielle les racines quatrièmes de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2) On considère dans \mathbb{C} , l'équation (E) : $z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.

a. Sans calculer les solutions z' et z'' de (E), montrer que $|z' \cdot z''| = 4$ et $\arg(z' \cdot z'') \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

b. Donner la forme cartésienne de $(3 - 2i\sqrt{3})^2$.

c. Résoudre alors l'équation (E).

3) On note A le point d'affixe 1 , B le point $-2 + 2i\sqrt{3}$ et C le point d'affixe c où c est le nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$ et de partie réelle $\frac{5}{2}$.

a. Déterminer le module de c puis écrire c sous la forme cartésienne.

b. Déterminer $\frac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

En déduire la nature du triangle ABC .