2010 / 2011

MATHEMATIQUES

DEVOIR DE SYNTHESE N°1

Date : 08 / 12 / 2010

Durée : 2 H

http://afimath.jimdo.com/

4 SC_{2+3}

EXERCICE N°1

Répondre par Vrai ou faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1°) L'équation $z^2 = -5$ n'admet aucune solution dans C.

2°) Soit f une fonction dérivable sur [– 1, 2] telle que f (– 1) = 2 ; f (2) = – 1.
Alors l'équation f ' (x) = – 1 admet au moins une solution dans [– 1, 2].

3°) La suite (U_n) définie sur IN* par : $U_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ n'admet pas de limite.

4°) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(4x) - 1}{x^2} = 8$.

EXERCICE N°2

1°) a / Résoudre dans C : $z^2 + (1 - i)z - i = 0$

b / Résoudre dans C l'équation (E) : $z^2 + (1 - i)\, e^{i\alpha} z - i\, e^{i2\alpha} = 0$; $\alpha \in$ IR.

2°) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $e^{i\alpha}$, $i\,e^{i\alpha}$ et $-e^{i\alpha}$.

a / Montrer que pour tout $\alpha \in$ IR, ABC est un triangle rectangle et isocèle en B.

b / Déterminer l'affixe du point D pour que ABCD soit un carré.

3°) a / Donner l'écriture exponentielle de $i\,e^{i\alpha}$ et $-e^{i\alpha}$.

b / Déterminer les solutions de l'équation :

$$(E') \quad z^6 + (1 - i)\; e^{i\frac{\pi}{12}} . z^3 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

EXERCICE N°3

1°) On considère la fonction g définie sur IR par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} - 1$.

a / Dresser le tableau de variation de g.

b / En déduire que pour tout $x \in$ IR ; g (x) < 0.

2°)a / Montrer que g réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b / Déterminer le domaine de continuité de g^{-1} et expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in$ J.

c / Montrer que g^{-1} est dérivable sur] – 2, 0 [et calculer $(g^{-1})'(-\frac{1}{2})$.

3°) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + 3} - x + 1)$.

a / Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

b / Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x) = \frac{1}{2} g(x)$.

c / Montrer que pour tout $x \in IR_+$; $| f'(x) | \le \frac{1}{2}$.

4°) Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \text{ ; pour tout } n \in IN \end{cases}$

a / Montrer que $U_n \geq 0$; pour tout $n \in IN$.

b / En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis montrer que pour tout $n \in IN$

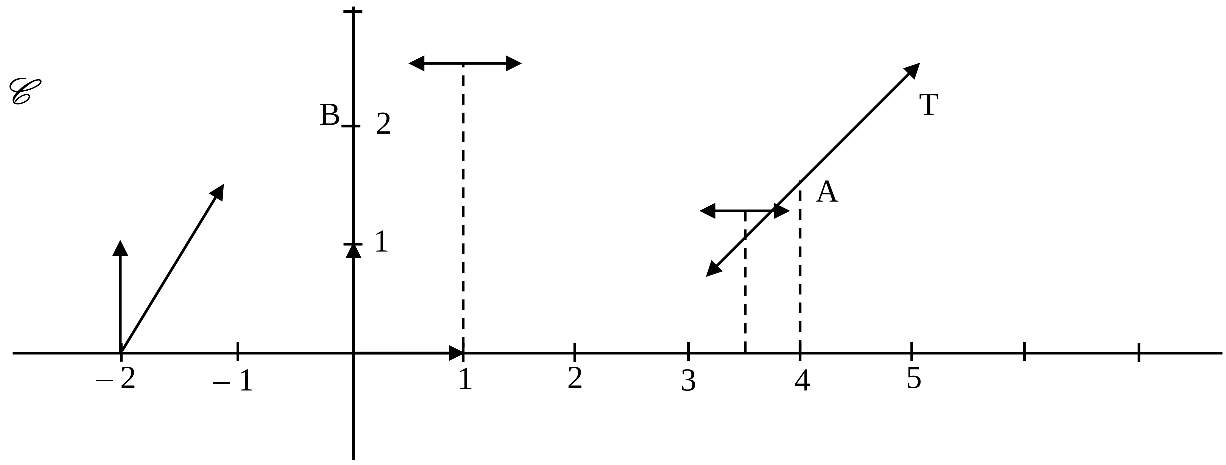
$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$$

c / Déduire que pour tout $n \in IN$; $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et trouver $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

EXERCICE N°4

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur IR.

$\mathscr{C}$ admet une tangente T en A , deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 et $\frac{7}{2}$ et deux demi tangentes au point d'abscisse – 2



1°) a / Calculer $f'(1)$; $f'(\frac{7}{2})$; $f'(4)$ et $\lim_{n \to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$.

b / Donner une équation de la tangente T.

c / Justifier que A est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$

d / Justifier que $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à (AB).

2°) Donner le tableau de variation de f.

3°) Soit g la fonction définie sur [0, + ∞ [par $g = \sqrt{f}$.

Donner le tableau de variation de g.