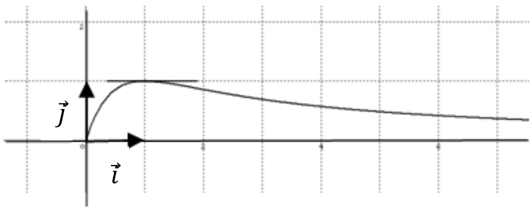
AFIF BEN ISMAIL	**Devoir de synthèse n° 1** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp*
Date : 09 /12 / 2009	http://afimath.jimdo.com/	*Durée : 2 heures*

Exercice n°1 : **(3 pts)**

Pour chacune des propositions suivantes, répondre par vrai ou faux sans justification.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note sera ramenée à zéro.

1) Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0\,,+\infty[$.
La courbe représentative de sa fonction dérivée f' dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j}\,)$ est donnée par le graphique ci-contre.



Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

$a/$ f est décroissante sur $[1\,,+\infty[$.

$b/$ Le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

$c/$ $\mathscr{C}$ a une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

2) Soit g une fonction dérivable sur IR_+ telle que, pour tout $x \in IR_+$, $\frac{-2}{3} \leq g'(x) \leq \frac{1}{3}$.

On a alors, pour tout $x \in IR_+$

$a/$ $\frac{-2}{3}x \leq g(x) \leq \frac{1}{3}x$.

$b/$ $|g(x) - g(0)| \leq \frac{2}{3}x$.

$c/$ Si $g(0) = 0$, alors la courbe représentative de g est comprise entre les droites d'équations : $y = \frac{-2}{3}x$ et $y = \frac{1}{3}x$.

Exercice n°2 : **(5,5 pts)**

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. unité graphique : 2cm.

1) On rappelle que, pour tous nombres complexes a et b : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.
Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^3 = 8$.

2) On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c définies par :

$$a = 2,\quad b = -1 + i\sqrt{3}\quad et\quad c = -1 - i\sqrt{3}\,.$$

$a/$ Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes b et c.

$b/$ Placer les points A, B et C dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

3) Soit B' le point d'affixe $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

$a/$ Montrer que le triangle ABB' est rectangle et isocèle en A.

$b/$ Placer le point B' dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

4) Soit M le milieu de $[BB']$, on désigne par m l'affixe de M.

$a/$ Montrer que $m = \frac{(1+\sqrt{3})}{2}(1+i\sqrt{3})$.

$b/$ En déduire que les points O, C et M sont alignés.

Exercice n°3 : *(4,5 pts)*

Soit f la fonction définie sur $[-1\,,1]$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

1) $a/$ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et à droite en (-1).
   $b/$ Interpréter géométriquement les résultats.
2) $a/$ Montrer que f est dérivable sur $]-1\,,1[$ et calculer $f'(x)$.
   $b/$ Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.
3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0\,,1[$ une solution unique α.

Exercice n°4 : *(7 pts)*

On considère les suites U et V définies sur IN par :

$U_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$ $\quad V_n = \frac{2}{U_n}$ $\quad$ et $\quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$.

1) Calculer : $V_0\,, U_1\,, V_1\,, U_2$ et V_2 .
2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, on a : $\begin{cases} 1 \leq U_n \leq 2 \\ \quad et \\ 1 \leq V_n \leq 2 \end{cases}$
3) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_{n+1} - V_{n+1} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)}$. [1] (On pourra remarquer que : $U_n . V_n = 2$).
4) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $U_n > V_n$.
5) Montrer que U est décroissante et que V est croissante.
6) Montrer que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq 1$.
   En déduire que $(U_n - V_n)^2 \leq U_n - V_n$. [2]
7) En utilisant les relations [1] et [2], montrer que, pour tout $n \in IN$, on a :
   $$U_{n+1} - V_{n+1} \leq \frac{1}{4}(U_n - V_n).$$
   En déduire que, pour tout $n \in IN$, on a : $U_n - V_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
8) Montrer que les deux suites U et V sont convergentes vers la même limite ℓ qu'on calculera.

Bonne chance