http://afimath.jimdo.com/	*Devoir de Synthèse*	*4 ème X_{1+2+3}*
	n°1	*Le 09/12/2009*
	MATHEMATIQUES	*Durée : 2H*

NB : Ce sujet comporte trois pages numérotées de 1 à 3.
La page 3 est a rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points)

Soit $\alpha \in [0,2\pi[$.

On considère dans C l'équation $(E_\alpha): z^2-(1+i)e^{i\alpha}z+ie^{2i\alpha}=0$.

1. Résoudre dans C l'équation. (E_α)
   On notera z_1 et z_2 les solutions de (E_α).
2. On pose $Z_\alpha = z_1 + z_2$.
   a. Ecrire Z_α sous forme trigonométrique.
   b. En déduire la valeur exacte de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
   On considère les points A, N et M d'affixes respectives $-1+i$, $e^{i\alpha}$ et $ie^{i\alpha}$.
   a. Déterminer α pour que les points A, N et M soient alignés.
   b. Vérifier que $(\vec{u},\overrightarrow{NM}) \equiv \alpha + \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.
   c. Déterminer les valeurs de α pour que la droite (NM) soit parallèle à l'axe des réels.

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-1}-x+1$

On désigne par (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que $\forall x \in]1,+\infty[$ on a $\frac{f(x)}{x-1}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}-1$
   b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le resultat.
   c. Vérifier que $\forall x \in]1,+\infty[$ on a $f'(x)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.
2. a. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$
   b. Dresser le tableau de variation de f.
   c. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
3. a. Justifier graphiquement que f^{-1} est dérivable à droite en 0.
   b. Donner le tableau de variation de f^{-1}.
4. a. Calculer $f(\sqrt{5})$.
   b. Montrer que f^{-1} est dérivable en $3-\sqrt{5}$ et donner l'équation de la tangente à

$(\xi_{f^{-1}})$ en son point d'abscisse $3-\sqrt{5}$.

5. a. Montrer que $\forall x \in J$ on a $f^{-1}(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{2(x-1)}$.

   b. Résoudre alors l'équation $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 3 (**6 points**)

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ par $f(x)=1+3\cos^2 x$.

On désigne par (ξ_f) la courbe réprésentatative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f.

   b. Montrer que f réalise une bijection de $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2. a. Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 1.

   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,4[$.

   c. Montrer que $\forall x \in]1,4[$ on a $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{-x^2+5x-4}}$.

   d. Montrer que $\forall x \in \left]\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{4}\right[$ on a $\dfrac{1}{3}<(f^{-1})'(x)<\dfrac{2}{3}$.

3. a. Calculer $f(\dfrac{2\pi}{3})$ et $f(\dfrac{5\pi}{6})$.

   b. Montrer que l'équation $f^{-1}(x)=x$ admet dans $\left]\dfrac{7}{4},\dfrac{13}{4}\right[$ une seule solution α.

   c. Tracer (ξ_f) et $(\xi_{f^{-1}})$ dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. Montrer que $\forall x \in \left]\alpha,\dfrac{13}{4}\right[$ on a $\dfrac{1}{3}(x+2\alpha)\le f^{-1}(x)\le\dfrac{1}{3}(2x+\alpha)$.

Annexe à rendre avec la copie

Répondre par vrai ou faux

Exercice 4 (3 points)

- 1. Si une suite (u_n) définie sur IN vérifiant $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ alors :

  la suite (u_n) est convergente vers 0.

- 2. Soit (u_n) la suite définie sur IN par $u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

  La suite (u_n) est convergente .

- 3. Si une suite (u_n) définie sur IN vérifiant :
  - $u_0 = 1$
  - $u_{n+1} \geq \frac{5}{3} u_n$ pour tout n de IN.

  alors la suite (u_n) est divergente.

- 4. $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 . \sin\left(\frac{\pi}{n^2}\right) = \pi$

Question	**Réponse**	**Points obtenus**
1		
2		
3		
4		

TOTAL	…... . …… / **3**

Nom :……………………………………………………..

Prénom :…………………………………………………..

Classe……………