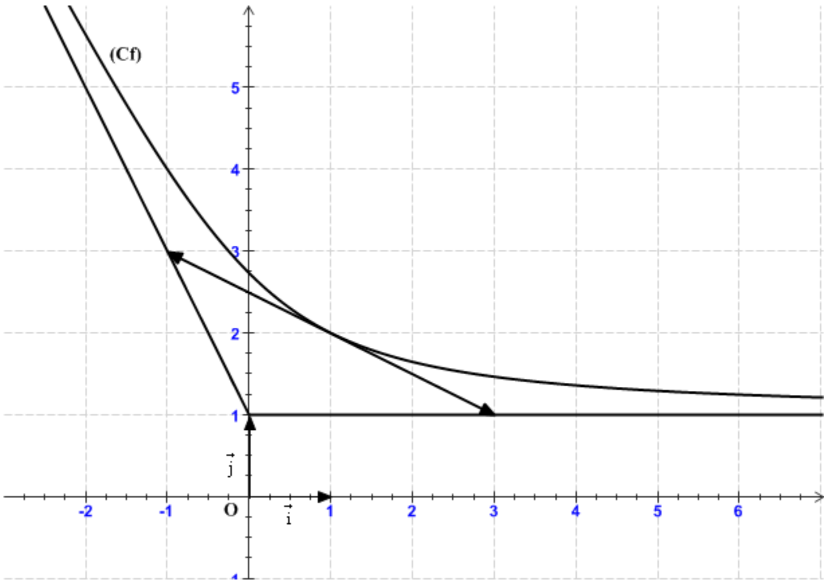
http://afimath.jimdo.com/	*Devoir de synthèse n°1*	**Décembre 2009** **Classes : 4ème Sc 1 et 3** **Durée : 2 heures**

Exercice n°1 : *(4 points)*

On a représenté ci – dessous la courbe d'une fonction *f* définie sur IR, ainsi que ses asymptotes aux voisinages de - ∞ et de + ∞.



1. a) Déterminer, en utilisant le graphique, les limites éventuelles suivantes :

   $\lim\limits_{-\infty} f$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$; $\lim\limits_{+\infty} f$;

   $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α dans [1, 2]

2. Soit (u_n) la suite définie sur IN par :

   $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de IN.

   a) Tracer la courbe ci – contre sur la copie puis placer les quatre premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses.

   b) La suite (u_n) est – elle monotone ?

   c) La suite (u_n) est – elle convergente ? si oui quelle est sa limite ?

Exercice n°2 : *(5 points)*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2-(2+i)z+1+i=0$.
2. On considère l'équation complexe $(E_\theta): z^2-(i+2\cos\theta)z+1+ie^{-i\theta}=0$ avec $\theta\in[0,\pi]$
   a) Vérifier que $e^{-i\theta}$ est une solution de (E_θ).

   b) En déduire l'autre solution de (E_θ).

3. Dans le plan complexe P, rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(e^{-i\theta})$ et $B(i+e^{i\theta})$ avec $\theta\in[0,\pi]$.

   a) Montrer $AB=1+2\sin\theta$.

   b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle AOB est isocèle de sommet principal A.

Exercice n°3 : *(5 points)*

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur IN par : $u_0=\dfrac{1}{2}$; $v_0=\dfrac{7}{2}$ et pour tout n de IN,

$u_{n+1} = \dfrac{5u_n + v_n}{6}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 5v_n}{6}$.

1. Pour tout n de IN, on pose $t_n = v_n - u_n$.

   a) Montrer que (t_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

   b) Exprimer (t_n) en fonction de n, en déduire que pour tout n de IN, $u_n \leq v_n$.

2. a) Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n).

   b) Prouver alors que (u_n) et (v_n) convergent la même limite ℓ.

3. Pour tout n de IN, on pose $w_n = v_n + u_n$.

   a) Montrer que (w_n) est une suite constante.

   b) Déterminer alors ℓ.

Exercice n°4 : ***(6 points)***

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0,2] \\ x - \dfrac{4}{x} & \text{si } x \in]2,+\infty[\end{cases}$

On note (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. a) Montrer que f est continue en 2.

   b) Etudier la dérivabilité en 2.

3. a) Montrer que pour tout $x \in]0,2[$, $f'(x) = \dfrac{-4}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

   b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in]2,+\infty[$.

   c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

   d) Tracer (ζ) (On précisera les demi tangentes au point d'abscisse 2)