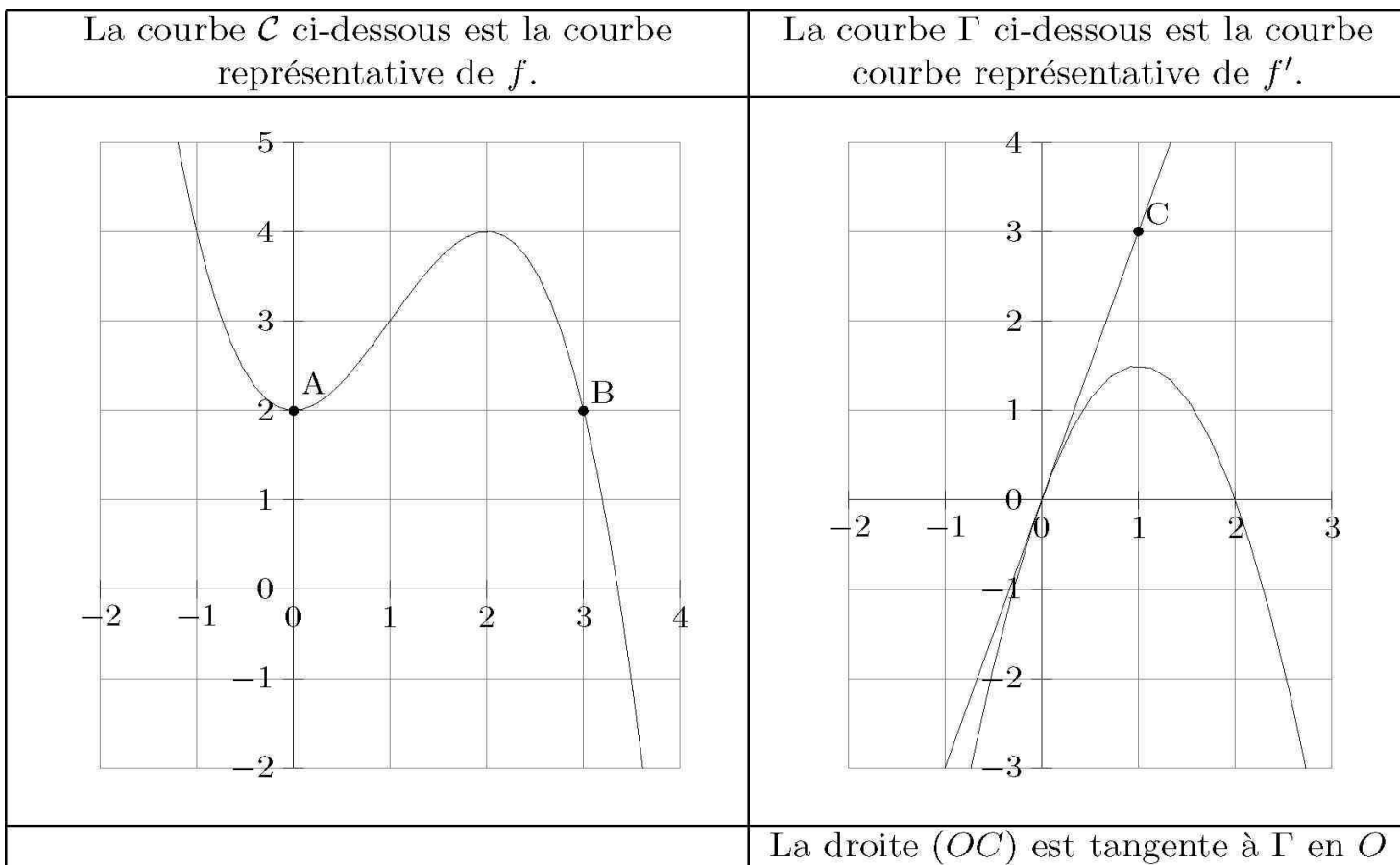


**EXERCICE : 1 ( 3 points )**

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f'$  et  $f''$  les dérivées première et seconde de  $f$



- 1) dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
- 2) déterminer l'équation de la tangente à  $\zeta_f$  en B et calculer  $f''(0)$
- 3) montrer que  $\zeta_f$  admet un point d'inflexion I que l'on précisera

**EXERCICE :2 ( 5 points )**

on considère la fonction  $g$  définie sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$  par  $g(x) = \sqrt{2 \cotg(x)}$

- 1) déterminer le domaine de dérivabilité de  $g$  et calculer  $g'(x)$
- 2) montrer que  $g$  réalise une bijection de  $]0, \frac{\pi}{2}[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera
- 3) a) calculer  $g^{-1}(\sqrt{2})$  et  $(g^{-1})'(\sqrt{2})$   
 b) montrer que  $g^{-1}$  est dérivable a droite en 0  
 c) montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{-4x}{4+x^4}$

**EXERCICE :3 ( 6 points )**

soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = 1 - \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$

On désigne par  $\zeta_f$  sa courbe dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 4 cm)

1) a – étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu

b – montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x}}$

c – dresser le tableau de variation de  $f$

2) a – Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

on note  $f^{-1}$  sa fonction réciproque

b – montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$

c – expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$

3) a – montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $]0, +\infty[$  une solution unique  $\alpha$  et que  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$

b – Construire  $\zeta_f$  et  $\zeta_{f^{-1}}$  dans le même repère

**EXERCICE :4 ( 6 points )**

Soit  $m$  un réel non nul.

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 2iz - (1 + m^2) = 0$

2) Pour tout nombre complexe  $z$ , on pose :  $f(z) = z^3 - 3iz^2 - (3 + m^2)z + i(1 + m^2)$ .

a) Vérifier que  $f(i) = 0$  ; en déduire une factorisation de  $f(z)$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 0$ .

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(o; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points  $A, M'$  et  $M''$  d'affixes respectives  $i, i+m$  et  $i-m$ .

a) Vérifier que  $A$  est le milieu du segment  $[M'M'']$ .

b) Montrer que le triangle  $OM'M''$  est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de  $m$  pour que le triangle  $OM'M''$  soit équilatéral.