AFIF BEN ISMAIL	*Devoir de synthèse N°1*	http://afimath.jimdo.com/
	Mathématiques *durée 2h*	*4 ^{ème} SC exp1*

PROBLEME (12pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2-1}$. On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en -1.

* Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) Calculer f '(x) puis étudier son signe suivant les valeurs de x.

* Dresser alors le tableau de variations de f (calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$)

4) a) Montrer que la droite D : y = 2x -1 est une asymptote à (ζ_f) au voisinage $(+\infty)$

b) Etudier la position de (ζ_f) par rapport à D sur $[1, +\infty[$.

5) Déterminer les coordonnes des points d'intersection de (ζ_f) et Δ : y = x.

6) Tracer (ζ_f), Δ et les asymptotes de (ζ_f) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$.

7) a) Montrer que la restriction h de f à $[1, +\infty[$ admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ et tracer sa courbe dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

8) Soit g la fonction définie sur $]0, \pi/2]$ par g(x) = $f(\frac{1}{\sin x}) - x$

a) Montrer que pour tout $x \in]0, \pi/2]$; g(x) = - 1 – x + cotg(x/2)

b) Dresser le tableau de variations de g sur $]0, \pi/2]$

c) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

d) Montrer que $\alpha \in]\pi/6, \pi/3[$

Exercice (8pts)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère la fonction f de variable complexe Z définie sur ¢ par :

$f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i) Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3}) Z - 8i$.

1) a) Calculer f (2i).

b) Vérifier que $f(Z) = (Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4)$.

c) Résoudre dans ¢ l'équation f (Z) = 0.

2) On considère les nombres complexes suivants :

$Z_1 = \sqrt{3} - i$; $Z_2 = \sqrt{3} + i$ et $Z_3 = 2i$

a) Placer, dans le plan P les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives Z_1 ; Z_2 et Z_3

b) Calculer $|Z_1|$; $|Z_2|$ et $|Z_3|$. En déduire que les points M_1, M_2 et M_3 sont sur un même cercle de centre O.

3) a) Montrer que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un parallélogramme.

b) Calculer $|Z_2 - Z_1|$ et $|Z_2 - Z_3|$. Interpréter géométriquement.

c) En déduire que le quadrilatère $OM_1M_2M_3$ est un losange.

d) Calculer la surface du losange $OM_1M_2M_3$

Bon travail