AFIF BEN ISMAIL	*Devoir de synthèse N°1*	http://afimath.jimdo.com/
	Mathématiques *durée 2h*	*4 ème SC exp2*

Exercice N °1 (4pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1) Si (U_n) est une suite bornée alors (U_n) est convergente.

2) Si (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent alors la suite (U_n) converge.

3) Soit f une fonction définie sur l'intervalle [0, 2]
Si $f(0).f(2) < 0$ alors il existe un réel c de l'intervalle]0, 2[tel que f(c) = 0.

4) Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels alors le conjugué de $Z = z_1 + i z_2$ est $\overline{Z} = z_1 - i z_2$

Exercice N °2 (5pts)

On se propose de résoudre dans C l'équation (E) :
$Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = 0$

1) a) Déterminer le réel y tel que iy soit solution de l'équation (E).
   b) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe Z on a : $Z^3 + (\sqrt{3} - i)Z^2 + (1 - i\sqrt{3})Z - i = (Z - i)(Z^2 + aZ + b)$

2) a) Résoudre dans C l'équation (E') : $Z^2 + \sqrt{3}\,Z + 1 = 0$
   b) Mettre les solutions de (E) sous formes algébrique et trigonométrique

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = i$, $Z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$ et $Z_C = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$

   a) Représenter les points A, B et C dans le repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$

   b) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$

   c) En déduire la mesure en radian de l'angle de vecteur $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ et la nature du triangle ABC.

Exercice N °3(6pts)

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n{}^2}{2U_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n \geq 1$

   b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Etudier les variations de la fonction f : x $\mapsto \dfrac{x^2}{2x-1}$, $x \in [1,+\infty[$

   b) En utilisant les inégalités des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 1|$

   c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - 1| \leq (1/2)^n$

   d) Trouver alors la limite de (U_n).

Exercice N °4(5pts)

On considère la fonction f : x $\mapsto \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x} & si \quad x \geq 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x}} & si \quad x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est bien définie sur IR

2) Montrer que f est continue en 0.

3) Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
   Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

4) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter ce résultat.

5) a) Montrer que la droite D : y = 2x + 1 est une asymptote de (C_f)

   b) Etudier la position de (C_f) par rapport à D.

6) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

Bon travail

Exercice N °4

On considère la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^{\ 2}}{2U_n - 1} \end{cases}$

1) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $U_n \geq 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 1|$

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - 1| \leq (1/2)^n$

c) Trouver alors la limite de (U_n).

3) On pose $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n}$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n. En déduire que $\forall n \in IN,\ V_n = (1/2)^{2^n}$

b) Exprimer U_n en fonction de n puis retrouver la limite de (U_n).