

AFIF BEN ISMAIL	<u>Devoir de synthèse N°1</u>	<a href="http://afimath.jimdo.com/">http://afimath.jimdo.com/</a>
	<u>Mathématiques</u> <u>durée 2h</u>	<u>4<sup>ème</sup> SC exp1</u> <u>Le 06/12/2007</u>

### **PROBLEME (12pts)**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}$ . On désigne par  $(\zeta_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1)** Déterminer le domaine de définition de  $f$
- 2)** Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1 et à gauche en -1.
  - \* Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- 3)** Calculer  $f'(x)$  puis étudier son signe suivant les valeurs de  $x$ .
  - \* Dresser alors le tableau de variations de  $f$  (calculer les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ )
- 4) a)** Montrer que la droite  $D : y = 2x - 1$  est une asymptote à  $(\zeta_f)$  au voisinage  $(+\infty)$ 
  - b) Etudier la position de  $(\zeta_f)$  par rapport à  $D$  sur  $[1, +\infty[$ .
- 5)** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de  $(\zeta_f)$  et  $\Delta : y = x$ .
- 6)** Tracer  $(\zeta_f)$ ,  $\Delta$  et les asymptotes de  $(\zeta_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 7) a)** Montrer que la restriction  $h$  de  $f$  à  $[1, +\infty[$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
  - b) Expliciter  $h^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  et tracer sa courbe dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 8)** Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, \pi/2]$  par  $g(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right) - x$ 
  - a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, \pi/2]$  ;  $g(x) = -1 - x + \cotg(x/2)$
  - b) Dresser le tableau de variations de  $g$  sur  $]0, \pi/2]$
  - c) En déduire qu'il existe un unique réel  $\alpha \in ]0, \pi/2[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ .
  - d) Montrer que  $\alpha \in ]\pi/6, \pi/3[$

### **Exercice (8pts)**

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère la fonction f de variable complexe Z définie sur  $\mathbb{C}$  par :

$$f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i.$$

**1) a)** Calculer  $f(2i)$ .

**b)** Vérifier que  $f(Z) = (Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4)$ .

**c)** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(Z) = 0$ .

**2)** On considère les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \sqrt{3} - i; \quad Z_2 = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad Z_3 = 2i$$

**a)** Placer, dans le plan P les points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  d'affixes respectives  $Z_1, Z_2$  et  $Z_3$

**b)** Calculer  $|Z_1|, |Z_2|$  et  $|Z_3|$ . En déduire que les points  $M_1, M_2$  et  $M_3$  sont sur un même cercle de centre O.

**3) a)** Montrer que le quadrilatère  $OM_1M_2M_3$  est un parallélogramme.

**b)** Calculer  $|Z_2 - Z_1|$  et  $|Z_2 - Z_3|$ . Interpréter géométriquement.

**c)** En déduire que le quadrilatère  $OM_1M_2M_3$  est un losange.

**d)** Calculer la surface du losange  $OM_1M_2M_3$

**Bon travail**