Exercice :1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
La justification est demandée.

1) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)^2}$

a) f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$

b) f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = \dfrac{4x}{3\sqrt[3]{1+x^2}}$

c) f est dérivable sur IR et on a : $f'(x) = \dfrac{2(1+x^2)}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$

2) L'approximation affine pour x proche de 0 de $\sqrt[3]{1+x}$ est :

a) $\dfrac{3+x}{3}$ b) $1-\dfrac{x}{3}$ c) $1+\dfrac{x}{2}$

3) Soit f une fonction continue sur [0, 1] et dérivable sur]0, 1[.
On suppose que f(0) = 0 et f(1)=1.
a)La fonction f est croissante sur [0,1].
b)Il existe c $\in$]0, 1[tel que $f'(c) = 1$.
c)f([0, 1]) = [0, 1].

4) Soit f une fonction impaire et strictement monotone sur IR, alors

a) f^{-1} est impaire b) f^{-1} est paire c) f^{-1} n'est ni pair ni impaire

Exercice 2: (3 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = 3 + i$ et $z_B = 6 + 3i$.
et Soit C et D les points tel que ABCD soit un carré direct.
1) a) Faire une figure
b) Déterminer l'expression complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
c) En déduire que $z_D = 1 + 4i$, puis calculer z_C
2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f définie par $z' = -iz - 2 + 10i$.
3) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application f o r.

Exercice 3:(4 points)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que AB = 2 AD.
Soient I, J et F les points définies par : I = A*B ; J = D * C et C = B * F
1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement S qui envoie A en C et I en J
b) Caractériser S

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [CD].
(BD) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et recoupe le cercle $\mathscr{C}'$ en N ; on pose M' = $S_{(IJ)}$(M)
 a) Montrer que N = S (M)
 b) Déduire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles.

3) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie f vérifiant f(A) = C, f(I) = J et f(D) = F
 b) Montrer que f est antidéplacement.
 c) Déterminer f(B).
 d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g = f o $S_{(AD)}$.

Exercice 4 :(4 points):

Soit f la fonction définie sur I = [0, $\frac{\pi}{4}$[par f(x) = $\frac{1}{1-\tan(x)}$

1)a) Etudier les variations de f
 b) Déduire que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
 c) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f et la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans un même repère orthonormé

2) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J , on a : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$

3) a) Montrer que pour tout n ∈ N* l'équation f(x) = n, admet dans I une solution unique notée x_n
 b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et qu'elle est convergente.
 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n)$

Exercice 5 :(5 points)

Soit s la suite définie sur IN* par $s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

1)a)Montrer que pour tout n ≥ 1 ; $s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$

 b)La suite s est-elle convergente ?

2) Vérifier que pour tout entier n ≥1, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

3) On considère les suites u et v définies sur IN* par $u_n = 2\sqrt{n} - s_n$ et $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$

a)Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+} \frac{S_n}{2\sqrt{n}}$

4) On pose l = $\lim\limits_{n\to+} u_n$

Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 0, 1 près

Exercice 2 :(4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
A et B sont les points d'affixes respectives $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{3\pi}{8}}$

On appelle f l'application du plan P dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \sqrt{2}\,\bar{z} + iz$

1) Déterminer f(A)

2) a)Déterminer l'ensemble l'ensemble E des points invariants par f.
b)vérifier que E = (OA)

3) On suppose que le point M(z) n'appartient pas à (OA)

a) Montrer que $\arg(z' - z) = \frac{3\pi}{8} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$;(On pourra écrire $z = re^{i\alpha}$.)

b) Que peut-on en déduire pour les droites (MM') et (OB) ?

c) Montrer que le point I d'affixe $\frac{z + z'}{2}$ est invariant par f.

4) Donner, une méthode de construction géométrique permettant d'obtenir l'image M' par f d'un point M quelconque du plan.