

Mathématiques	Devoir De Synthèse N° 1	http://afimath.jimdo.com/
4 ^{ème} Maths		08 / 12 / 2009, 3 ^h
AFIF BEN ISMAIL		

Exercice N°1 : (3 points)

Soit $\theta \in [0, 2\pi]$, Soit dans \mathbb{C} l'équation : $(E_\theta) : z^2 - (1+i + (1-i)e^{i\theta})z + (1+i)e^{i\theta} - ie^{i2\theta} = 0$.

- 1) a) Vérifier que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ) .
b) Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E_θ) .
- 2) Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = -iz + 1 + i$.
a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .
b) Montrer que $f(M_1) = M_2$.
c) Montrer que l'ensemble des points M_1 lorsque θ varie est un cercle \mathcal{C} que l'on précisera. En déduire l'ensemble des points M_2 lorsque θ varie.

Exercice N°2 : (4 points)

Dans la figure (1) ci-jointe, on considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]. \text{ Soit } \mathcal{C} \text{ le cercle de diamètre } [AB].$$

Soit R la rotation de centre A qui transforme B en C .

Soit \mathcal{C}' l'image de \mathcal{C} par R . On désigne par O le centre de \mathcal{C} et O' celui de \mathcal{C}' .

- 1) a) Construire \mathcal{C}' . Soit I le second point d'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{C}' autre que A .
b) Montrer que $I = B * C$ et préciser la nature du quadrilatère $IOAO'$.
- 2) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC .
a) Montrer que $f(A) = A$ et que $f(I) = I$.
b) En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant ABC .
- 3) Soient $r_1 = R_{\left(O, \frac{\pi}{2} \right)}$, $r_2 = R_{\left(O', \frac{\pi}{2} \right)}$, $f = r_2 \circ r_1$ et $g = r_2^{-1} \circ r_1$.
a) Préciser $f(B)$ et $g(B)$.
b) Caractériser les applications f et $\phi = f \circ S_{(BC)}$.
c) Soit M un point du plan tel que $r_1^{-1}(M) = M_1$ et $r_2^{-1}(M) = M_2$. Montrer à l'aide de g que l'on caractérisera que $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{BA}$.

Exercice N°3 : (3 points)

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sur $[0, 2]$.

2) a) Montrer que la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout

$$x \in]0, 2[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{2x - x^2}}.$$

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et en 2.

3) On pose pour tout $x \in [0, 2]$, $g(x) = f^{-1}(2 - x) + f^{-1}(x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, 2[$ puis calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, 2[$.

b) En déduire que pour tout x de $]0, 2[$, $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$.

Exercice N°4 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

1) a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Interpréter ces résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variations de f . Montrer que pour tout $x \in [2, 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]2, 3[$.

d) Tracer dans un repère ON la courbe ζ_f et la droite $\Delta : y = x$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) Tracer la courbe $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f .

3) Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \leq u_n \leq 3$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} |u_n - \alpha|$.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^n$.

En déduire que u est convergente et calculer sa limite.

Feuille à compléter et à remettre avec la copie

Nom : Prénom :

Exercice N° 5 : (5 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur \mathbb{R} :

I/ Cocher la bonne réponse.

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$ a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$ a) $-\infty$ b) 2 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} =$ a) $-\infty$ b) 1 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$ a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{x} =$ a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1} =$ a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} =$ a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} =$ a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$

II/

1) Compléter au dessous le tableau de variation de f.

2) Déterminer l'équation de l'asymptote

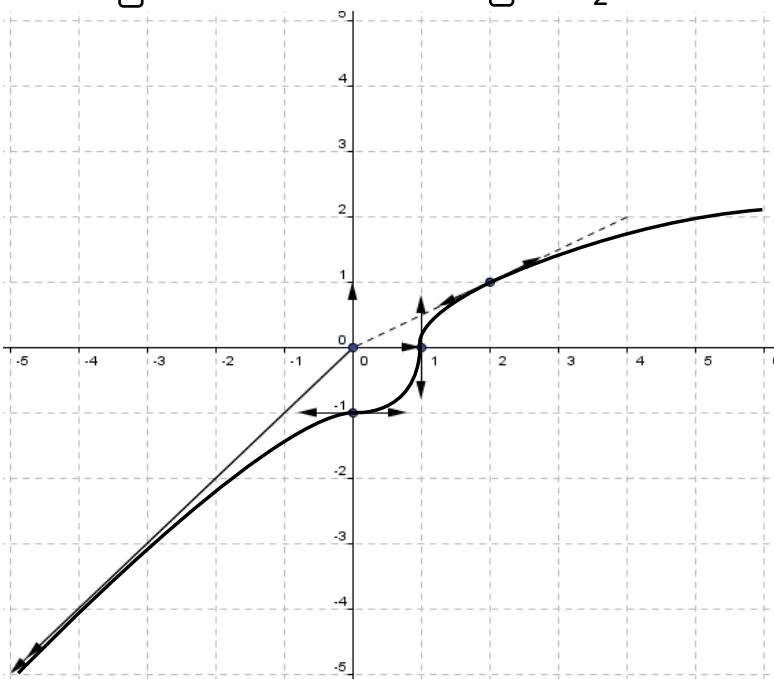
oblique à ζ_f : $y = \dots\dots\dots x + \dots\dots\dots$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J ?

.....

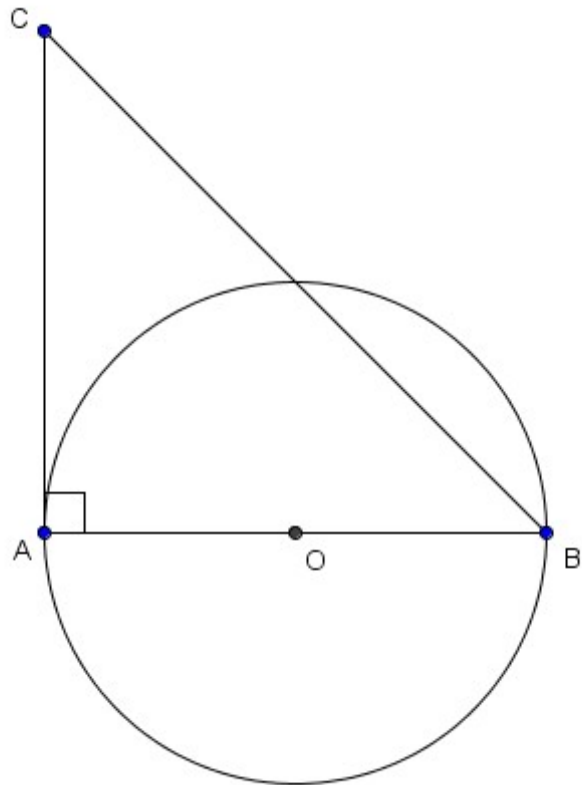
J =

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f .



x	
f'(x)	
f(x)	

Figure (1) à compléter



<http://afimath.jimdo.com/>