http://afimath.jimdo.com/	**Devoir de synthèse n° : 1**	Classes : 4M 1&2
AFIF BEN ISMAIL	Le 08/12/2009	Mathématiques

Exercice n° : 1 **(3 points)**

Répondre par vrai ou faux. Aucune justification n'est demandée.

1°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Soit z une solution autre que zéro de l'équation, dans l'ensemble des nombres complexes, (E) : $z^{n-1} = -\bar{z}$

a) $|z| = 1$

b) $z^n = -1$

2°) Soient Δ_1, Δ_2 et Δ_3 trois droites strictement parallèles. L'isométrie $f = S_{\Delta_1} o S_{\Delta_2} o S_{\Delta_3}$ est une :

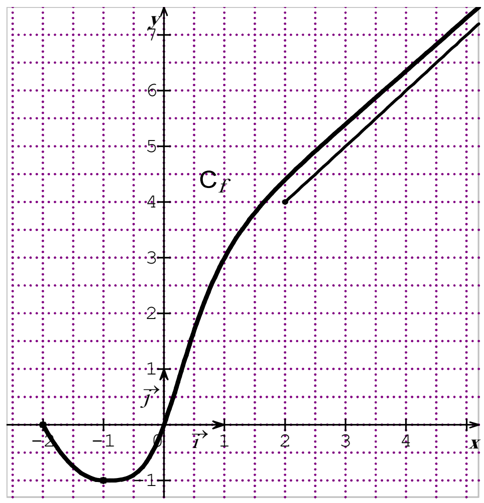
a) Symétrie orthogonale
b) Symétrie glissante

3°) La courbe (C_f) représentée ci-contre est celle d'une

fonction f définie sur [-2,+∞[et telle que : f(- 1) = - 1

et la droite D d'équation y = x + 2 est une

asymptote à (C_f) au voisinage de +∞.



a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{f(x)+1} = \dfrac{1}{2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - 2.x}{x} = -1$

Exercice n° : 2 **(4 points)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = i\bar{z} + 1$.

1°)a) Déterminer les images par f des points O , I et J.

b) Montrer que f est une isométrie qui ne fixe aucun point.

c) En déduire la nature de f.

2°) Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $\dfrac{-1}{2}(1+i)$

a) Montrer que l'écriture complexe de f o t est: $z' = i.\bar{z} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f o t. En déduire la nature de f o t.

c) Déterminer alors la forme réduite de f.

Exercice n° : 3 **(5 points)**

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD et de centre O.

On désigne par :

- I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [OC]
- S : la symétrie centrale de centre O.
- R : le quart de tour direct de centre I
- φ = S o R

1°) a) Déterminer $\varphi(I)$. En déduire que φ est une isométrie distincte de identité.

b) Déterminer $\varphi(J)$ puis $\varphi(B)$

c) Détruire que φ est une rotation de centre J dont on précisera l'angle.

2°) Soit g l'isométrie définie par $g = \varphi \circ S_{(AC)}$ où $S_{(AC)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (AC)

a) Caractériser : $S_{(JC)} o S_{(JL)}$ et $S_{(JL)} o S_{(AC)}$

b) Déduire que $g = S_{(JC)} o S_L$

c) On désigne par Δ_1 et Δ_2 les médiatrices respectives de [JC] et [OJ].

Caractériser $S_{\Delta_2} o S_{\Delta_1}$. En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

3°) Soit G le barycentre des points pondérés (O, 2) ; (J, -1) et (I, 1) et G' son image par φ.

Exprimer $\overrightarrow{CG'}$ en fonction de $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CK}$ puis construire G' sans construire G.

Exercice n° : 4 **(8 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité de longueur est 2 cm.

1 ^{ère} PARTIE :

On considère la fonction f définie sur [2, +∞[par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$ et on désigne par C sa courbe

représentative.

1°)a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.

b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative C.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de [2, +∞[dans un intervalle J que l'ont précisera

On note g la bijection réciproque de f.

b) Construire la courbe représentative C' de g dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

c) Montrer que $\forall\ x \in J,\ g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2^{éme} PARTIE :

On considère la suite $(U_n)_{n\,\in\,IN}$, définie par $U_0 \in]3\,,4[$ et $\forall\, n \in IN$, $U_{n+1} = 3 + f(U_n)$.

1°) Montrer que $\forall\ n \in IN,\ U_n \in\ ]3, 4[$.

2°)a) Montrer que pour tout $x \in]3, 4[$, $0 < f'(x) \le \dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

b) Montrer que l'équation f(x) = x – 3 admet dans]3, 4[une solution unique α.

c) Montrer que $\forall\, n \in IN,\ |u_{n+1} - \alpha| \le \dfrac{\sqrt{3}}{12}|u_n - \alpha|$

d) En déduire que $(U_n)_{n\,\in\,IN}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

3ème partie :

On considère la fonction φ définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{g(\cos(2x))} & \text{si } x \in \left]0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$

1°) Montrer que φ est continue à droite en 0.

2°) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\varphi(x) = \frac{\sin 2x}{1+\sin(2x)}$.

3°) Montrer que φ réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ dans un intervalle K que l'on précisera.

On note φ^{-1} sa bijection réciproque.

4°) Calculer $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. Montrer que φ^{-1} est dérivable en $\frac{1}{3}$ et déterminer $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{1}{3}\right)$.

5°) Etudier la dérivabilité de φ^{-1} sur K, puis expliciter $(\varphi^{-1})'(x)$ en fonction de x.