

Exercice 1 : (3 points) Répondre par : VRAI ou FAUX (Aucune justification n'est demandée)

Dans tout l'exercice le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ})

1. Les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par : $U_n = \frac{2}{n}$ et $V_n = \frac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

2. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq 1,001 \cdot U_n$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}$

4. Si $f(x) = \sin(\pi \tan(x))$ alors $f'(x) = \pi \cos(\pi \tan(x))$

5. Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $|z| = |z'|$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$ alors $z = z'$.

6. Si z et z' sont deux nombres complexes d'images M et M' et vérifiant $z \cdot z' = 1$ alors $[OI]$ est une bissectrice de l'angle (\vec{OM}, \vec{OM}')

Exercice 2 : (3 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle isocèle en A et tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par I, J et O les milieux respectifs des segments [BC], [AC], [AB]. On pose $D = S_O(C)$.

1. a. Caractériser l'application $S_{(BI)} \circ S_{(BO)}$.
b. Montrer que $R_{(B, -\frac{\pi}{2})} \circ S_O$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
2. a. Caractériser l'application $S_{(OI)} \circ S_{(BD)}$.
b. Montrer que $t_{\vec{BA}} \circ R_{(B, -\frac{\pi}{2})}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.
3. Montrer que l'application : $f = S_{(BC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AI)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

Exercice 3 : (4 points)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $z^2 - (1+i)e^{i\theta}z + ie^{i(2\theta)} = 0$

1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E).
2. On désigne par A et B les points de P d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $ie^{i\theta}$
Montrer que OAB est un triangle isocèle rectangle.
3. Pour tout nombre complexe z distinct de $e^{i\theta}$ et de $ie^{i\theta}$ on pose $Z = \frac{1 + ie^{i(-\theta)}z}{1 - e^{i(-\theta)}z}$.

On désigne par M et M' les points d'affixes respectives z et Z .

- a. Montrer que $(\widehat{U, OM'}) \equiv -\frac{\pi}{2} + (\widehat{MA, MB}) [2\pi]$ et que $OM' = \frac{MB}{MA}$.
- b. En déduire une construction du point M' lorsque M est le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 1).

Exercice 4 : (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

On désigne par Γ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{4}{(\sqrt{x^2 + 4})^3}$. Dresser le tableau de variation de f .
b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) \leq \frac{1}{2}$.
c. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans \mathbb{R} une seule solution α et que $\alpha \in]1,6 ; 1,8[$
En déduire que pour tout $x \leq \alpha$ on a : $f(x) \geq x$
- 2 Tracer Γ .
3. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.
 - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n < \alpha$.
 - b. Montrer que la suite (U_n) est montone , en déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.
 - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$.
 - d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Retrouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 5 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x}{1 - \sin x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe Γ la courbe de f dans un repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Par une simple lecture graphique :
Etudier la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et dresser le tableau de variation de f .
2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet exactement deux solutions α_n et β_n telles que
$$0 \leq \alpha_n < \frac{\pi}{2} < \beta_n \leq \pi$$

b. Construire sur le graphique α_1 , α_2 , α_3 , β_1 , β_2 et β_3
Que peut-on conjecturer quant à la monotonie et la convergence de chacune des suites (α_n) et (β_n)
c. Déterminer les valeurs exactes de α_0 et α_1 .
3. a. Montrer que la suite (α_n) est monotone, en déduire qu'elle est convergente vers un réel α .
b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\sin(\alpha_n) = \frac{n^2}{1+n^2}$. En déduire α et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n$.

Feuille à rendre

NOM :

PRENOM :

CLASSE :

N° :

Exercice 1 :

Question	Réponse
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Exercice 5 :

