

EXERCICE N1(5 points)

Dans le plan orienté ρ on considère un carré OABC de centre I tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit E le point de [OA] distinct de O et de A. La parallèle à la droite (OC) passant par E coupe [BC] en M et la parallèle à la droite (OB) passant par E coupe [AB] en N.

- 1/ Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie C sur B et M sur N.
- 2/ Montrer que f est une rotation. Montrer que $f(B)=A$. En déduire le centre de f .
- 3/ Montrer que $f \circ S_{(AC)}$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ qu'on déterminera.
- 4/ Montrer que $S_{(AB)} \circ f \circ S_{(AC)}$ est une translation et déterminer son vecteur.
- 5/ Soit g l'antidépacement qui envoie C sur B et M sur N.
Montrer que $g(B)=A$. En déduire que g est une symétrie glissante. Déterminer l'axe et le vecteur de g .
- 6/ Montrer que $f \circ g$ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

EXERCICE N° 2(5 points)

Soit θ un réel de l'intervalle $] -\pi, \pi]$. On considère la fonction f_θ définie par : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{i\theta}\}, f_\theta(z) = z' = \frac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}$

- 1/ Vérifier que si $\theta \in \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ alors f_θ est une fonction constante.
- 2/ On suppose que $\theta = 0$.
 - a- Montrer que $\forall z' \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ il existe un unique $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tel que $f_0(z) = z'$ et vérifier que $z = -f_0(-z')$.
 - b- Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ on a $f_0(e^{i\alpha}) = i \cotg(\frac{\alpha}{2})$
 - c- Utiliser les questions précédentes pour résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$
- 3/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (o, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A, B, M, M' d'affixes respectives $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}, z$ et $z' = f_\theta(z)$. On suppose que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ et $\theta \neq -\frac{\pi}{2}$
 - a- Montrer que z est imaginaire si et seulement si $|z'| = 1$.
 - b- Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$. Déterminer l'ensemble des points M lorsque le point M' décrit la demi-droite : $y = x, x > 0$

EXERCICE N3(4 points)

Soit f la fonction définie sur $I = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ par : $f(x) = 1 + 3\cos^2 x$

- 1/ Montrer que f réalise une bijection de I sur $[1,4]$.
- 2/ a- Vérifier que $f^{-1}(\frac{7}{4}) = \frac{2\pi}{3}$ et calculer $f^{-1}(\frac{13}{4})$.
b- Tracer dans un même repère orthonormé la courbe C_f de f et la courbe $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} .
- 3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1,4[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(4-x)(x-1)}}$
- 4/ a- Montrer que $\forall x \in [\frac{7}{4}, \frac{13}{4}]$, on a : $\frac{2}{9} \leq (f^{-1})'(x) \leq \frac{2}{3}$.
b- Montrer que l'équation $f^{-1}(x) = x$ admet dans l'intervalle $]\frac{7}{4}, \frac{13}{4}[$ une solution unique α .
c- Montrer que si $\alpha \leq x \leq \frac{13}{4}$ alors $\frac{1}{9}(2x + 7\alpha) \leq f^{-1}(x) \leq \frac{1}{3}(2x + \alpha)$.

EXERCICE N(6 points)

- 1/ A l'aide de graphique déterminer : $\lim_{x \rightarrow -4^-} \left[\frac{f(x)+3}{x+4} \right], \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\frac{f(x)-3}{x+1} \right]$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right]$
- 2/ C_f admet un élément de symétrie. Dresser le tableau de variation de f sur un domaine d'étude.
- 3/ On admet que f est infiniment dérivable sur $[4,6]$.
Montrer que $f''(x)=0$ admet une solution α sur $[4,6]$.
- 4/ On admet que $\forall x \in [3,4] : 2 \leq f'(x) \leq 3$.
 - a- Montrer que $\forall x \in [3,4] : 3x - 9 \leq f(x) \leq 2x - 5$.
 - b- Soit h la fonction définie sur $[3,4]$ par : $h(x) = f(x) - 2x + 9$.
Etudier les variations de h . Vérifier que 4 est l'unique solution de l'équation $h(x)=x$
 - c- Soit la suite W définie par : $W_0 = 3$ et $W_{n+1} = h(W_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) Etudier la monotonie de v sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Résoudre dans $[0, \frac{\pi}{2}]$: $v'(x) = 0$. Calculer $v'(\frac{\pi}{2})$.

iii) Dresser le tableau de variation de v . Construire la partie de C_v sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans un repère orthogonal.

6/ a- Montrer que f admet des primitives sur $[-1, 1]$.

b- Soit F la primitive de $f|_{[-1, 1]}$ égale à 0 en 0.

i) Donner $F'(-1)$, $F'(0)$, $F'(1)$ et $F''(0)$.

ii) Donner les variations de F sur $[-1, 1]$ puis le signe de $F(x)$ sur $[-1, 1]$.

c-i) Montrer que f est une primitive d'une fonction φ sur $]-1, 1[$.

ii) Donner le signe de $\varphi(x)$ sur $]-1, 1[$.



Bon Travail