	Devoir de synthèse N°1	Epreuve: Mathématiques
Date : 08/12/2009	Classe: 4 ème Math	Durée :3 heures

Exercice1 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux

a) Soit z un nombre complexe non nul. Si z^3 est un réel alors z est réel

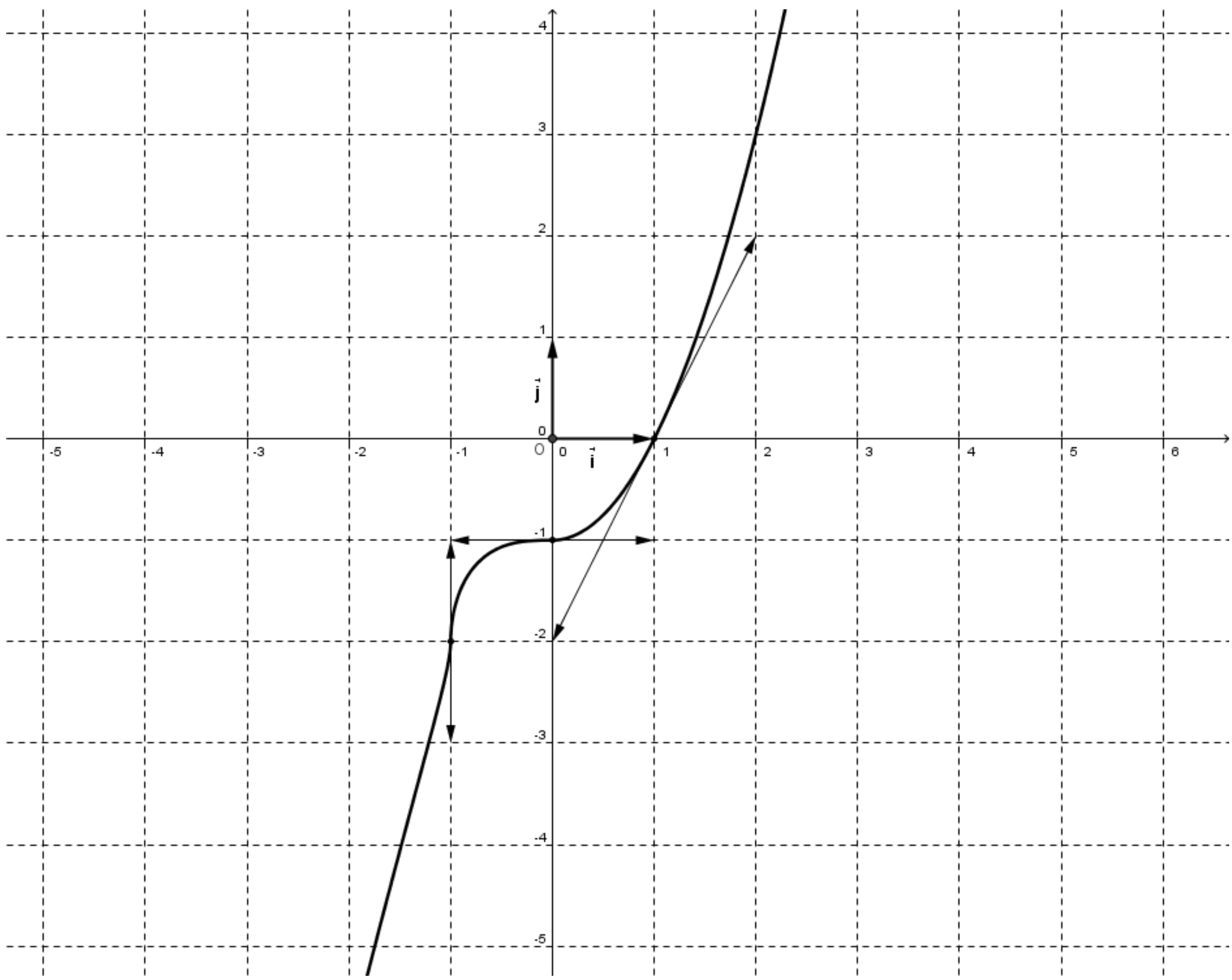
b) Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et de même module, alors $z = z'$ ou $z = -z'$

c) L'ensemble des points M d'affixe z dans le plan complexe tel que $\frac{iz+1}{z-1} \in \mathbb{R}$ est le cercle de diamètre $[AB]$ privée de $\{A,B\}$ où $A(1)$ et $B(i)$

d) L'écriture exponentielle de $\frac{i}{1+i\tan\theta}$; $\theta \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$ est $\cos\theta \, e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

Exercice 2 : (3 points)

Le graphique ci-dessous, représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) a) f est-elle dérivable en (-1)

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \frac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \frac{f(x)+2}{x+1}$

2) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on précisera

3) a) Montrer que f^{-1} est dérivable en (-2)

b) f^{-1} est-elle dérivable en 0? Pourquoi ?

c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f^{-1}

d) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(-2)$; $\left(f^{-1}\right)'(0)$

<u>Exercice 3:</u> (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=-1+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) a) Dresser le tableau des variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-1,1[$ une solution unique α et que $\alpha \in]\frac{4}{5},1[$.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Construire $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

c) Démontrer que $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}$ pour tout $x \in K$

3) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,\alpha] \\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0,\alpha]$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,\alpha]$ on a $\left|\left(f^{-1}\right)'(x)\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$

d) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4) Pour tout x de $]-1,1[$; on pose $h(x)=f\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)\right]$

a) Montrer que : pour tout $x \in]-1,1[$ on a $h(x)=-1+\cotan\left(\frac{\pi}{2}(x+1)\right)$

b) Montrer que h réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\left(h^{-1}\right)'(x)=\frac{-2}{\pi\left[(x+1)^2+1\right]}$

<u>Exercice4 :</u> (4 points)

1) On rappelle que 2003 est un nombre premier.
   On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 123x + 2003y = 1$
   a) Trouver une solution particulière $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E)
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)
   c) Déterminer un entier k tel que $123k \equiv 1\ (mod\ 2003)$
   d) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $123x \equiv 456\ (mod\ 2003)$
2) Pour fêter l'anniversaire de l'un de ses collègues de travail un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 50 dinars. Les hommes ont dépensé 5 dinars chacun et les femmes 3 dinars chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

<u>Exercice5:</u> (4 points)

Dans le plan orienté on considère un rectangle direct $ABCD$ de centre O tel que : $AB = 2AD$
On pose $I = A * B$ et $J = C * D$
Soit f une isométrie sans point fixe et qui envoie A en C et I en J

1) a) Montrer que f est une symétrie glissante
   b) Montrer que $f(B) = D$
2) Soit $E = f(C)$
   a) Montrer que: $\widehat{CDE} = \frac{\pi}{2}$
   b) En déduire que $D = A * E$
3) Soit A' le symétrique de A par rapport à B. On pose : $g = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(BC)}$
   a) Déterminer $g(B)$; $g(C)\ et\ g(A)$
   b) En déduire que $f = g$
   c) A l'aide d'une décomposition adéquate de $t_{\overrightarrow{BA'}}$ en deux symétries orthogonales, déterminer les éléments caractéristiques de f
4) Déterminer toutes les isométries qui laissent globalement invariant le triangle ABE

☺☺☺☺☺☺☺☺☺☺

<u>*Bon Travail*</u>