

Exercice n°1 : (4 points)

La courbe (C) ci-contre est celle d'une fonction f impaire définie sur \mathbb{R} .

(D) et (D') sont deux asymptotes à (C) aux voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. On donne :

(D) : $y = -x + 4$. A(1,2 ; 1,9) est un maximum de f.

En utilisant (C) répondre aux questions suivantes :

1- Justifier que pour tout x de \mathbb{R} on a :

$-x - 4 < f(x) < -x + 4$ et calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

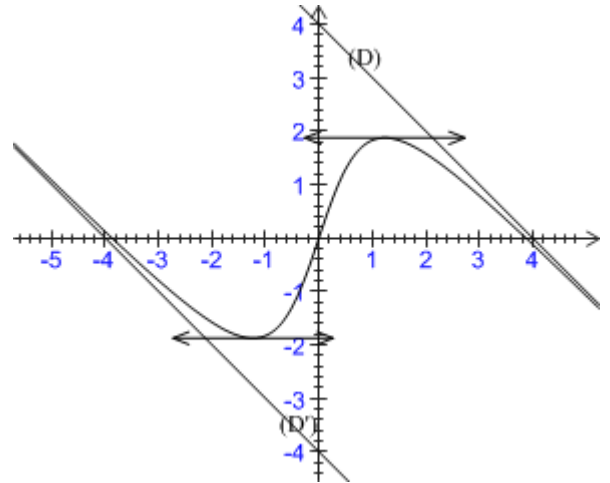
2- Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$$

3-a- Déterminer les images par f des intervalles $]-\infty; -1,9]; [-1,2; 1,2]; [1,2; +\infty[$ en les justifiant.

b- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions non nulles et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chaque solution.

**Exercice n°2 : (6 points)**

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{pu_n^2 + 1} \end{cases}$$
 où p est un réel non nul

1- On suppose que $p = 1$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n}$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2- On suppose que $p \in]0, 1[$

a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n < \frac{1}{\sqrt{1-p}}$

b- Etudier la monotonie de la suite (U_n) . En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3- On suppose que $p \in]1, +\infty[$. On pose $S_n = 1 + p + p^2 + p^3 + \dots + p^{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}^2 - u_n^2 = p^n$

b- En déduire que : $u_n = \sqrt{S_n}$

4- On suppose que p est un entier différent de 1

a- Calculer $p^n + (1-p)u_n^2$. En déduire que p^n et $1-p$ sont premiers entre eux

b- Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E_n) : p^n x - (1-p)y = p$. Justifier que l'équation (E_n) possède des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et vérifier que les solutions de (E_n) sont les couples $(p + k(1-p), -u_n^2 + kp^n)$; $k \in \mathbb{Z}$

c- En déduire dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les solutions de l'équation : $10^n x + 2^{n+2} y = 10 \cdot 2^{n-1}$

Exercice n°3 : (5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs -1 ; 1 ; i et $-i$.

1- Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; M et M' les points d'affixes respectifs z et z' et M' R(M).

Exprimer z' en fonction de z.

2- Soit R' l'application du plan P dans lui-même qui au point M d'affixe z, on associe le point M'' d'affixe z'' tel que $z'' = e^{i\theta} z + 1 - e^{i\theta}$ où θ est un réel de l'intervalle $]-\pi, 0[$.

a- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de R'.

b- Déterminer le réel θ pour que C soit le milieu du segment [M'M''].

3- On suppose que $\theta = -\frac{\pi}{2}$

a- Montrer que $M'M'' = 2DM$.

b- En déduire l'ensemble (\mathcal{C}) des points M' et M'' lorsque M décrit le cercle de centre D et de rayon 1

4- a - Montrer que pour tout M de $P \setminus \{A\}$ et distinct de M' et M'' on a : $\frac{z'' - z}{z' - z} = i \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$.

b- En déduire que : $(MM', MM'') \equiv \frac{\pi}{2} + (MA, MB) [2\pi]$ et déterminer l'ensemble (\mathcal{C}') des points M tels que les points M, M' et M'' sont alignés.

Exercice n°4 : (5 points)

Dans le plan orienté on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct et soient R et R' les rotations de centres respectifs A et B et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $f = R \circ R'$

Pour tout point M de [AB], on considère les points P et Q appartenant respectivement aux segments [AC] et [BC], tels que $AM = AP$ et $BM = BQ$.

- 1- Déterminer $f(B)$ et $f(C)$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f
- 2- a- Montrer que $R(M) = P$ et $R'(Q) = M$
b- En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe Ω
c- Montrer que : $S_{(A\Omega)}(Q) = S_{(C\Omega)}(P)$
- 3- a- Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme B en C et C en A
Préciser la nature et les éléments caractéristiques de g .
b- Déterminer l'ensemble des milieux des segments [PQ] lorsque le point M décrit le segment [AB].
- 4- Construire le segment [PQ] sachant que la droite (PQ) est parallèle à une droite (Δ) donnée non perpendiculaire à (AB)