

Devoir de synthèse N°1

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+ . Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Montrer que f est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$. Soit $g = f^{-1}$.

3) Montrer que g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $g'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$.

4) a- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

b- En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : g(\sqrt{x^2+1} - x) + g(\sqrt{x^2+1} + x)$ est constante.

EXERCICE N° 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A et B les points d'affixes

respectives 1 et (-1) . À tout point $M(z)$ tel que $z \neq 1$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 1 + \frac{2}{z-1}$. f

étant la transformation du plan tel que $f(M) = M'$

1) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un cercle \mathcal{C} de centre A dont on précisera le rayon.

2) Montrer que si z est imaginaire pure alors $|z'| = 1$. En déduire l'image de l'axe des imaginaires par f .

3) Montrer que z' est réel si et seulement si z est un réel, on déduire que la droite (AB) est globalement invariante par f .

4) a- Montrer que les points A , M , et M' sont alignés

b- En déduire la construction du point M' image d'un point M de l'axe (O, \vec{j})

EXERCICE N°3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AB = 2AC$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = I$ et $f(C) = B$.

b) Préciser l'angle \sphericalangle de f ; en déduire que f est une rotation. Trouver une construction géométrique de son centre Ω

2) Pour la suite Δ désigne la médiatrice du segment $[OA]$. Soit $O \in \Delta$ et \mathcal{C} le cercle de centre O et passant par

A et Ω , \mathcal{C} recoupe (AC) en M et (AB) en N .

a- Vérifier que $[MN]$ est un diamètre de \mathcal{C} puis préciser $f(\Omega M)$.

b- En déduire que ΩMN est un triangle rectangle isocèle.

3) On pose $g = f \circ S_\Delta$ et $h = S_\Delta \circ f \circ S_\Delta$

- a- Préciser $g(A)$ et $g(\Omega)$, en déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe Δ_1 et le vecteur u_1 .
- b- Préciser $h(A)$. Montrer que $f \circ h$ est une translation dont on précisera son vecteur.
- c- Caractériser h , puis préciser $h(I)$.

EXERCICE N°4

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, +\infty[$ une solution unique a . Vérifier que $1 < a < 2$.
- b) montrer que pour tout x de $[1,2]$ on a : $f(x) \in [1,2]$ et que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
- 2) Soit U la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
- a) Montrer que pour tout entier n on a : $1 \leq U_n \leq 2$.
- b) Montrer que pour tout entier n on a : $|U_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
- c) Montrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite.
- 3) Pour tout entier naturel n on pose $t_n = (-1)^n (U_n - a)$ et $S_n = \sum_{k=0}^n t_k$
- a) Montrer que pour tout entier n on a : $U_{2n+1} \leq a \leq U_{2n}$. En déduire $t_n \geq 0$, pour tout entier naturel n .
- b) Montrer que pour tout entier n on a : $S_n \geq 0$ et que S_n est croissante.
- c) Montrer que $S_n \leq 2$ et que la suite (S_n) est convergente.

NOM :.....

PRENOM :.....

EXERCICE N°5 (3 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte.

1) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $I=B*C$, $J=A*C$ et $K= A*B$.

a) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors :

$r = S_{(AC)} \circ S_{(AI)}$

$r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

$r = S_{(AB)} \circ S_{(AI)}$

b) Soit t la translation de vecteur \overrightarrow{AC} alors :

$t = S_{(IJ)} \circ S_{(AB)}$

$t = S_{(AB)} \circ S_{(IJ)}$

$t = S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$

2)a) Soit \vec{u} un vecteur non nul et A un point du plan. L'application $t_{\vec{u}} \circ S_A$ est

une translation

une symétrie centrale

une symétrie glissante.

b) Soit D une droite passant par un point O et R une rotation de centre O alors $S_D \circ R$ est :

une rotation

une symétrie glissante

symétrie axiale

3) Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos(x)$ alors

a) $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égale à :

$\frac{2}{\sqrt{3}}$

-2

$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) f^{-1} est dérivable sur :

$[-1, 1[$

$[-1, 1]$

$] -1, 1[$