Le : 05 / 12 / 2008. **Durée : 3 heures** **Classe : 4ème Maths 2**

Devoir de synthèse N°1

EXERCICE N°1

Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\sqrt{\text{tg}x}$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0^+. Interpreter graphiquement ce resultat.

2)Montrer que f est bijective de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$.Soit $g=f^{-1}$.

3) Montrer que g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $g'(x)=\frac{2x}{1+x^4}$.

4) a-Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[$ on a : $g(x)+g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$.

b-En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$:$g\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+g\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ est constante.

EXERCICE N° 2

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .A et B les points d'affixes respectives 1et (-1). A tout point M(z) tel que $z \neq 1$ on associe le point M'(z') tel que $z' = 1+\frac{2}{z-1}$. f étant la transformation du plan tel que f(M) = M'

1) Montrer que l'ensemble des points invariants par f est un cercle $\mathscr{C}$ de centre A dont on précisera le rayon.
2) Montrer que si z est imaginaire pure alors $|z'| = 1$.En déduire l'image de l'axe des imaginaires par f.
3) Montrer que z' est réel si et seulement si z est un réel, on déduire que la droite (AB) est globalement invariante par f.
4) a- Montrer que les points A, M, et M' sont alignés

   b- En déduire la construction du point M' image d'un point M de l'axe $(O,\vec{j})$

EXERCICE N°3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB = 2AC.Soit I le milieu du segment [AB].

1) a- Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = I et f(C) = B.

b) Préciser l'angle θ de f ; en déduire que f est une rotation. Trouver une construction géométrique de son centre Ω

2) Pour la suite Δ désigne la médiatrice du segment [ΩA]. Soit O ∈ Δ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et passant par A et Ω, $\mathscr{C}$ recoupe (AC) en M et (AB) en N.

a- Vérifier que [MN] est un diamètre de $\mathscr{C}$ puis préciser f((ΩM)).

b- En déduire que ΩMN est un triangle rectangle isocèle.

3) On pose $g = f \circ S_\Delta$ et $h = S_\Delta \circ f \circ S_\Delta$

a- Préciser g (A) et g (Ω), en déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe Δ_1 et le vecteur $\vec{u}_1$.

b- Préciser h(A). Montrer que f o h est une translation dont on précisera son vecteur.

c- Caractériser h, puis préciser h (I).

EXERCICE N°4

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Montrer que l'équation f(x) = x admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique a. Vérifier que $1 < a < 2$.

b) montrer que pour tout x de [1,2] on a : $f(x)\in [1,2]$ et que $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

2) Soit U la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1}= f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout entier n on a : $1 \leq U_n \leq 2$.

b) Montrer que pour tout entier n on a : $|U_n - a| \leq (\dfrac{1}{2})^n$.

c) Montrer que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3) Pour tout entier naturel n on pose $t_n = (-1)^n (U_n - a)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} t_k$

a) Montrer que pour tout entier n on a : $U_{2n+1} \leq a \leq U_{2n}$. En déduire $t_n \geq 0$, pour tout entier naturel n.

b) Montrer que pour tout entier n on a : $S_n \geq 0$ et que S_n est croissante.

c) Montrer que $S_n \leq 2$ et que la suite (S_n) est convergente.

NOM :.............................
PRENOM :.............................

EXERCICE N°5 (3 points)
Pour chaque question une seule réponse est exacte. L'exercice consiste à cocher la réponse exacte.

1) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, I=B*C, J=A*C et K= A*B .

a) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ alors :

☐ $r = S_{(AC)} o S_{(AI)}$ ☐ $r = S_{(AC)} o S_{(AB)}$ ☐ $r = S_{(AB)} o S_{(AI)}$

b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ alors :

☐ $t = S_{(IJ)} o S_{(AB)}$ ☐ $t = S_{(AB)} o S_{(IJ)}$ ☐ $t = S_{(AB)} o S_{(AC)}$

2)a) Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan. L'application $t_{\vec{u}} o S_A$ est

☐ une translation ☐ une symétrie centrale ☐ une symétrie glissante.

b) Soit D une droite passant par un point O et R une rotation de centre O alors $S_D o R$ est :

☐ une rotation ☐ une symétrie glissante ☐ symétrie axiale

3) Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par f(x) = cos(x) alors

a) $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ est égale à:

☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ☐ -2 ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$

b) f^{-1} est dérivable sur :

☐ [-1,1[☐ [-1,1] ☐]-1,1[