

AFIF BEN ISMAIL	<u>DEVOIR DE SYNTHESE N°1</u>	http://afimath.jimdo.com/
	<u>4°MATH 2</u>	<u>DUREE 3 HEURES</u>

EXERCICE N°1 : (5points)

1. Montrer par récurrence que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

2. Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Dédurre que (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$ (On utilisera les questions 2-a et 1)

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ et calculer la limite de (U_n)

EXERCICE N°2 :(5points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (o, \bar{u}, \bar{v}) , on considère un triangle ABC inscrit dans un cercle (C) de centre o, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B et C et H le point d'affixe a+b+c

1. Montrer que $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}$

2. On pose $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Montrer que w est imaginaire pur

3. a. Vérifier que : $(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = w$ et montrer que $\frac{b+c}{b-c} = \frac{w}{|b-c|^2}$

b. Dédurre que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (CB)

4. Démontrer de même que les droites (BH) et (CA) sont perpendiculaires. Que représente le point H pour le triangle ABC

EXERCICE N°3 : (4points)

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}x - x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1-a. Montrer que la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \operatorname{tg}x - x$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, il existe un réel $c \in]0, x[$ tel que $f(x) = \operatorname{tg}^2 c$

c- Prouver que $0 \leq f(x) \leq \operatorname{tg}^2 x$

2- En déduire que f est dérivable en 0 à droite et déterminer $f'_d(0)$

EXERCICE N°4 : (6 points)

I- $f(x) = 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ définie sur $[1, +\infty[$

1- Etudier la dérivabilité de f en 1 à droite. Interprétée géométriquement le résultat. Déterminer le domaine de dérivabilité de f

2- a - Etudier les variations de f sur $[1, +\infty[$

b- Prouver que f est une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

c- Tracer (C) et la courbe (C^{-1}) de f^{-1} dans un même repère

5- Expliciter pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x)$; Vérifier que pour tout $x \in [1, 2[$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - (x-1)^2}$

II- Soient les fonctions g et u définies sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $u(x) = 1 + \cos x$ et $g(x) = f^{-1} \circ u(x)$

1- Vérifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ $g(x) = 1 + \cotg^2 x$

2- Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis montrer que h est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle K que l'on déterminera

3-Déterminer le domaine E de dérivabilité de g^{-1} et montrer que $(g^{-1})'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}$

4- Soient les fonctions v et h définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $v(x) = 1 + \tan^2 x$ et $h(x) = g^{-1} \circ v(x)$.

Montrer que $h'(x) = -1$; Calculer $h\left(\frac{\pi}{4}\right)$, en déduire $h(x)$

<http://afimath.jimdo.com/>