http://afimath.jimdo.com/

Devoir de contrôle n°:1 **4 Sc$_5$**

AFIF BEN ISMAIL

Le 10/11/2010 **DUREE : 2 h**

Exercice 1 : (4 points)

Pour chaque question, une seule proposition est exacte. Laquelle ? Aucune justification n'est demandée.

1) Soient f et g deux fonction vérifiant : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. alors :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}$ fog(x) = 3 b. $\lim\limits_{x\to+\infty}$ gof(x) = 3 c. $\lim\limits_{x\to+\infty}$ fog(x) = $+\infty$.

2) Soit dans le plan complexe les points A , B et C d'affixes respectives z_A = 2+i , z_B = 3 – 2i et z_C = 5 + 2i.

a. A , B et C sont alignés b. $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux c. ABC est équilatéral

3) L'ensemble des points M(z) tel que |z – 2 + i| = |z + i| est :

a. Un cercle b. un singleton c. une droite

4) Les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation : $z^2 - (1+4i)z - 5(1-i) = 0$ sont :

a. 1 – 3i et 2 + i b. – 1 + 3i et 2 + i c. 1 – 3i et 2 – i

Exercice 2 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^3+x+1 & \text{si } x \le 0 \\ f(x)=2-\dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.
2) Justifier alors la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3) a. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}$ f(x) .

   b. Montrer que : pour tout x > 0 , $2-\dfrac{1}{x}\le f(x)\le 2+\dfrac{1}{x}$. Calculer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}$ f(x).
4) a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α dans [-1 , 0].

   b. Donner un encadrement d'amplitude 0,25 de α.

Exercice 3 : (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2z + \dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$

   a) Vérifier que $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = -2+2i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2$; $z_B = 1-e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_C = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   a) Montrer que pour tout réel θ on a : $1+e^{i\theta}=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1-e^{i\theta}=-2i.\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

   b) Ecrire z_B et z_C sous forme exponentielle .

   c) Calculer $\dfrac{z_B}{z_C}$ en déduire que le triangle OBC est rectangle en O .

   d) Montrer que OBAC est un rectangle .

<u>Exercice 4 :</u> (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n^2}{2}} \quad \text{pour out } n \in \text{¥} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in$ É , $u_n \geq 1$.
2) Montrer pour tout $n \in$ É , $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-u_n^2}{2(u_{n+1}+u_n)}$.
3) Vérifier alors que (u_n) est décroissante.
4) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n^2 - 1$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   c. En déduire la limite de v_n et la limite de u_n .

Bon Travail