

Mathématiques	DEVOIR DE CONTRÔLE N° 1	http://afimath.jimdo.com/
4 ^{ème} Sc-Exp ₄		
Mr AFIF BEN ISMAIL		01 / 11 / 2010 , 2 ^h

➤ **Exercice N°1 :** Pour chaque question, une seule des 3 propositions est exacte. Laquelle ?

- Lorsque θ varie sur $[0, 2\pi[$, $M(i - e^{i\theta})$ décrit : a) $\zeta_{(0(0), 1)}$ b) $\zeta_{(A(i), 1)}$ c) $\zeta_{(B(-i), 1)}$
- Un argument de $-\sqrt{2} \frac{1+i\sqrt{3}}{3i}$ est : a) $-\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{6}$
- Un argument de $-1 - e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, \pi[$ est : a) $\pi - \frac{\theta}{2}$ b) $\pi + \frac{\theta}{2}$ c) $-\frac{\theta}{2}$

➤ **Exercice N°2 :**

Le plan complexe est rapporté au repère ON direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . Soient les points $A(-2i)$, $B(-i/2)$, $I(i)$ et $J(-i)$.

f étant l'application qui à tout point $M(z)$ distinct de A , associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2iz - 1}{z + 2i}$.

1) Déterminer les points invariants de f .

2) a) Montrer que si $M \neq A$ et $M \neq B$ on a : $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right) [2\pi]$.

b) En déduire les ensembles suivants : $E_1 = \{ M(z) \text{ tq } z' \in \mathbb{R} \}$, $E_2 = \{ M(z) \text{ tq } z' \in i\mathbb{R}_+^* \}$.

3) Montrer que si $z \neq i$ et $z \neq -i$ alors $\frac{z'+i}{z'-i} = 3 \frac{z+i}{z-i}$.

4) Soit \mathcal{C} l'ensemble des points M tel que $MJ = \frac{1}{3} MI$.

a) Vérifier que $A \in \mathcal{C}$ puis déterminer et construire \mathcal{C} .

b) Montrer que si $M \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$ alors M' décrit une droite fixe que l'on déterminera.

➤ **Exercice N°3 :** Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) + 1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2 - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1) a) Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $-x^2 + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$.

b) Montrer que f est continue en 0.

2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

3) Montrer qu'il existe un réel $x_0 \in]-2, -1[$ tel que $f(x_0) = 0$.

4) a) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a : $f(x) = -1 + \frac{4}{2 + \sqrt{x}}$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Déterminer alors l'image de $[0, +\infty[$ par f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0, 1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α .

➤ **Exercice N°4 :** Soit u la suite réelle définie sur \mathbb{N} par : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{u_n + 6}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n < 1$.

b) Montrer que u est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite v est géométrique de raison $q = \frac{7}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . Retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.