BACCALAUREAT

Sciences expérimentale

Sciences expérimentale

***

Devoir de contrôle n°1

***

Mathématiques

Durée de l'épreuve : 2 heures

NB : On tiendra compte de la rédaction et de la clarté du raisonnement dans l'appréciation des copies.

Pour commencer : **2 points**

Répondre par vrai ou faux.

- 1. Soit f une fonction dérivable sur [-1,2] telle que :
  - $1 \leq f'(x) \leq 2$
  - f(-1)=0

  alors $2 \leq f(2) \leq 6$.
- 2. L'ensemble des points M d'affixe $z = 2 + i\cos\theta$ où $\theta \in$ IR est la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 1 — 6 points

1. a. Résoudre dans C l'équation (E_2) : $z^2 - 2z + 2 = 0$

   On notera z_1 et z_2 les racines de (E_2).

   b. Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

   Calculer alors la valeur de $z_1^8 + z_2^8$.

2. Soit p un nombre complexe non nul.

   On considère dans C l'équation :

$$(E_p) : z^2 - pz + (1+i)p - 2i = 0$$

   Montrer que si l'équation (E_p) possède deux racines conjuguées distinctes alors p est réel.

   Montrer que dans ce cas $p = 2$.

3. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On considère les points A, B et M d'affixes respectives $1+i$, $1-i$ et $1-i+ie^{2i\theta}$.

   a. Montrer que $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}} = 2e^{2i\theta}$

   b. Montrer que si $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}}$ est réel alors les points A, B et M sont alignés.

   Déterminer alors θ.

   c. Montrer que si $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}}$ est imaginaire alors le triangle ABM est rectangle en B.

   Déterminer alors θ.

Exercice 2 **4 points**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points B , M et M' d'affixes respectives $\frac{1+i}{2}$, z et z' tel que $z' = (1-i)z - 1$

1. a. Montrer que $|z'| = \sqrt{2}\left|z - \frac{1+i}{2}\right|$

   b. Déterminer et construire l'ensemble (E) = { M(z) tel que $|z'| \leq OB$ }.

2. On suppose $M \neq B$.

   a. Montrer que $\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{4} + (\vec{u}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colineaires et de sens contraires.

Exercice 3 — 3 points

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+|\cos x|}$.

   Montrer que f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et caculer $f'(\dfrac{\pi}{2})$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 4 — 5 points

Questions de cours :

- Enoncer le théorème de Rolle.
- Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Application

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-\sin\dfrac{\pi}{2}x$.

On designe par (Cf) la courbe réprésentatative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur IR.
2. a. Montrer qu'il existe un point de (Cf) d'abscisse c appartient à $]0,1[$ tel que la tangente en ce point est de vecteur directeur $\vec{i}$.

   b. Déterminer l'expression de $f'(x)$ la fonction dérivée de f.

   c. Montrer que $f(c)=c^2-\dfrac{\sqrt{\pi^2-16c^2}}{\pi}$
3. a. Calculer f(1) et f(2).

   b. Montrer que la courbe de f coupe la droite d'équation cartésienne $y=2$ en un point d'abscisse α appartient à $]1,2[$.

   c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5.