http://afimath.jimdo.com/	DEVOIR DE CONTROLE	AFIF BEN ISMAIL
A-S : 2009/2010	N° :1	SECTION : **4 SC$_1$**
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : **2h**	COEFFICIENT : 3

NB : +Le sujet comporte 2 pages.
+ L'usage de correcteur est interdit.
+ La présentation est appréciée.

EXERCICE N°1 :(3,75 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. L'élève indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 0,75 *point ; une réponse inexacte ou l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{U},\vec{V})$.

1) Une solution de l'équation $2z+\bar{z} = 6+i$ est :
a. 3i **b.** 2-i **c.** 2+i

2) Soit z un nombre complexe ; $|z+i|$ est égal à :
a. $|z|+1$ **b.** $\sqrt{z^2+1}$ **c.** $|iz-1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ **b.** $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ **c.** $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4) Soient A et B deux points d'affixe respective i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-i| = |z+1|$ est :
a. la droite (AB) **b.** le cercle de diamètre [AB]
c. la droite perpendiculaire à (AB) passant par O

5) Soit Ω le point d'affixe $1-i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x+iy$ vérifiant $|z-1+i| = |3-4i|$ a pour équation :
a. $y = -x+1$ **b.** $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$ **c.** $z = 1-i+5e^{i\theta}$ avec θ réel

EXERCICE N°2:(6 pts)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$
On considère la transformation du plan f qui, a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z^2+1$.

1) Déterminer les antécédents du point O.
2) Déterminer les points invariants par f. (M est invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M$)
3) Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image par f.
Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4) Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. Déterminer l'affixe du point A′ image de A par f puis prouver que les points O, A et A′ sont alignés.
5) Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ et N le point d'affixe $e^{i\theta}$.
a. Montrer que N appartient au cercle (C) de centre O et de rayon 1.
b. Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c. Vérifier que $\overrightarrow{ON'} = 2\cos\theta\,\overrightarrow{ON}$ En déduire que les points O, N et N' sont alignés.
d. Expliquer la construction du point N'.

EXERCICE N°3:(4,5 pts)

Une fonction f est définie et continue sur $IR-\{3\}$. On connait son tableau de variation

x	$-\infty$	-2	1	3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$ ↗	0

1. Lorsque cela est possible déterminer (en justifiant la réponse) les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{f(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} \qquad \lim_{x\to1^+}\frac{1}{f(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} \qquad \lim_{x\to3}\frac{1}{f(x)}$$

2. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement deux solutions.
   On notera α la solution différente de 1
   b) En déduire le signe de f(x) suivant les valeurs de x

EXERCICE N°4 :(2 pts)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{1+x^2}$.

1) Montrer que f est décroissante sur [0, +∞ [.
2) Montrer que f(x) ≥ 2 pour tout $x\in[0,+\infty[$.
3) En déduire que f admet une limite finie en +∞.

EXERCICE N°5 :(3,75pts)

Corriger les réponses suivantes.

Les fonctions h et g sont données par leurs courbes respectives C_g et C_h.

On donner des informations sur la fonction f

1) Si $f(x)\le h(x)$ pour x ≤ -2, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
2) Si $f(x)\ge h(x)$ pour $x\succ 0$, alors $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$.
3) Si $g(x)\le f(x)\le h(x)$ pour x ≥ 2, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.
4) Si $f(x)\le g(x)$ pour x ≤ -2, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.
5) Si $|f(x)-2|\le h(x)$ pour x ≤ -2, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$