Devoir de contrôle n° 1 4iéme sc	Mathématiques : novembre 2009 http://afimath.jimdo.com/

Exercice N°1 (3 points)(Voir page 2)

Exercice N°2:(4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, Soit le nombre complexe $z_0=\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

1) Déterminer la forme trigonométrique de z_0 ;

2) Verifier que : $z_0^4 + \overline{z_0}^4 = -32$

3)a) Soit a = $(\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$.Vérifier que a $=\sqrt{2}.\, z_0 .e^{\frac{i\pi}{6}}$ et déterminer alors sa forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos(\frac{5\pi}{12})$ et $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

Exercice N°3: (7 points)

1)Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$

a) Résoudre dans C l'équation :$z^2-2z+4=0$.
b) Exprimer les solution z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2)On donne dans P les points A , B et C d'affixes respectives $1+i\sqrt{3}$,2 et $1-i\sqrt{3}$
Montrer que le quadrilatère OABC est un losange

4) a) Soit z un nombre complexe distinct de 1 et $\theta \neq 2k\pi$ tel que $\frac{z+1}{z-1} = e^{i\theta}$

Montrer que z = $\frac{-i}{\tan(\frac{\theta}{2})}$

b)En déduire dans C les solutions de l'équation : (E') : $(\frac{2z+2}{z-1})^2 - 2(\frac{2z+2}{z-1}) + 4 = 0$

Exercice N°4 : (6 points)

Siot la fonction f est définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2\sin(\frac{2}{x})}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1)a)Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $|f(x)| \leq x^2$.

b)En déduire la limite de f à droite en 0.

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

2)Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpreter chaque fois le résultat obtenu.

3)Soit h la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $h(x) = f(-\sqrt{x+1})$.

a)Montrer que h est continue sur $]-1,+\infty[$.

b)Montrer que l'équation $h(x) = -\frac{1}{4}$ admet au moins une solution dans $]0 , 1[$.

Annexe à rendre avec la copie

Nom :………………………. **Prénom :……………………**	**Classe :……..** **N°:…….**

I- Cocher l'unique réponse exacte dans chacun des cas suivants :

1)Si f est une fonction continue sur l'intervalle [-2,4] tels que $f\left(-2\right)=2$ et $f\left(4\right)=-1$ Alors l'équation : $f\left(x\right)=1$

☐ admet une unique solution dans [-2,4] ☐ admet au moins une solution dans [-2,4] ☐ n' admet pas de solution dans [-2,4]

2)Soit z = $\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$ - $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ ($\theta \in \mathbb{R}$),alors :

☐ z = cos(2θ) ☐ z = 1 ☐ z = sin (2θ)

3) Si f est une fonction croissante continue et ne s'annule pas sur un intervalle [a,+ ∞[avec a est un réel,alors :

☐ $\frac{1}{f}$ est croissante sur [a,+ ∞[☐ $\frac{1}{f}$ est décroissante sur [a,+ ∞[☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

II- Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) Si *z est* un nombre complexe d'argument $\frac{p}{3}$ alors z^{2010} est un nombre réel. ☐

2) l'ensemble des points *M* d'affixe *z* différent de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$ est une droite parallèle à l'axe des réels . ☐

3) On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{p}{5}\right) z + 1 = 0$.

L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 . ☐