Mathématiques	**Devoir De Synthèse N° 1**	http://afimath.jimdo.com/
4ème Sc-Exp 4		
Mr : AFIF BEN ISMAIL		*08 / 12 / 2010 , 2H*

❖ <u>Exercice N°1 :</u> (3 points)

Pour chaque question, une seule des 3 propositions est exacte. Laquelle ?

1) Sachant que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation : $z^2 - 2\cos\theta\ z + 1 = 0$, alors l'autre solution est :
   a) $i\cos\theta$ b) $i\ e^{i\theta}$ c) $e^{-i\theta}$.

2) Sachant que $\theta \in \left]\pi/2 , 3\pi/2\right[$, alors un argument de $z = i\cos\theta$ est :
   a) $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} + \theta$.

3) Soit Z un nombre complexe non nul . Si α est une racine carrée de Z alors l'autre racine de Z est
   a) $-\alpha$ b) $i\alpha$ c) $\overline{\alpha}$.

❖ <u>Exercice N°2 :</u> (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) a) Donner le module et un argument de $-2 + 2i\sqrt{3}$;
   b) Donner sous forme exponentielle les racines quatrièmes de $-2 + 2i\sqrt{3}$.

2) On considère dans Ê , l'équation (E) : $z^2 - (-1 + 2i\sqrt{3})z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$.
   a) Sans calculer les solutions z' et z" de (E) , montrer que $|z'.z''| = 4$ et $\arg(z'.z'') \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
   b) Donner la forme cartésienne de $(3 - 2i\sqrt{3})^2$.
   c) Résoudre alors l'équation (E).

3) On note A le point d'affixe 1 , B le point $-2 + 2i\sqrt{3}$ et C le point d'affixe z_C où z_C est le nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$ et de partie réelle $\frac{5}{2}$.
   a) Déterminer le module de z_C puis écrire z_C sous la forme cartésienne.
   b) Evaluer $\frac{AB}{AC}$ et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC})$. En déduire la nature du triangle ABC.

❖ <u>Exercice N°3 :</u> (7 points)

Soit f la fonction définie sur Ë par $f(x) = 1 + \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur Ë et que pour tout x ∈ Ë , $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Tracer la courbe ζ_f de f dans un repère orthonormé. (unité graphique 2 cm)

2) a) Montrer que f réalise une bijection de Ë sur un intervalle J que l'on précisera .
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
   c) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ la courbe de f^{-1} dans le même repère que ζ_f .

3) Montrer que pour tout x ∈ Ë, |f '(x)| Â $\frac{1}{2}$.

4) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in [\sqrt{3},2]$.

5) On définit la suite réelle (u_n) définie sur É par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

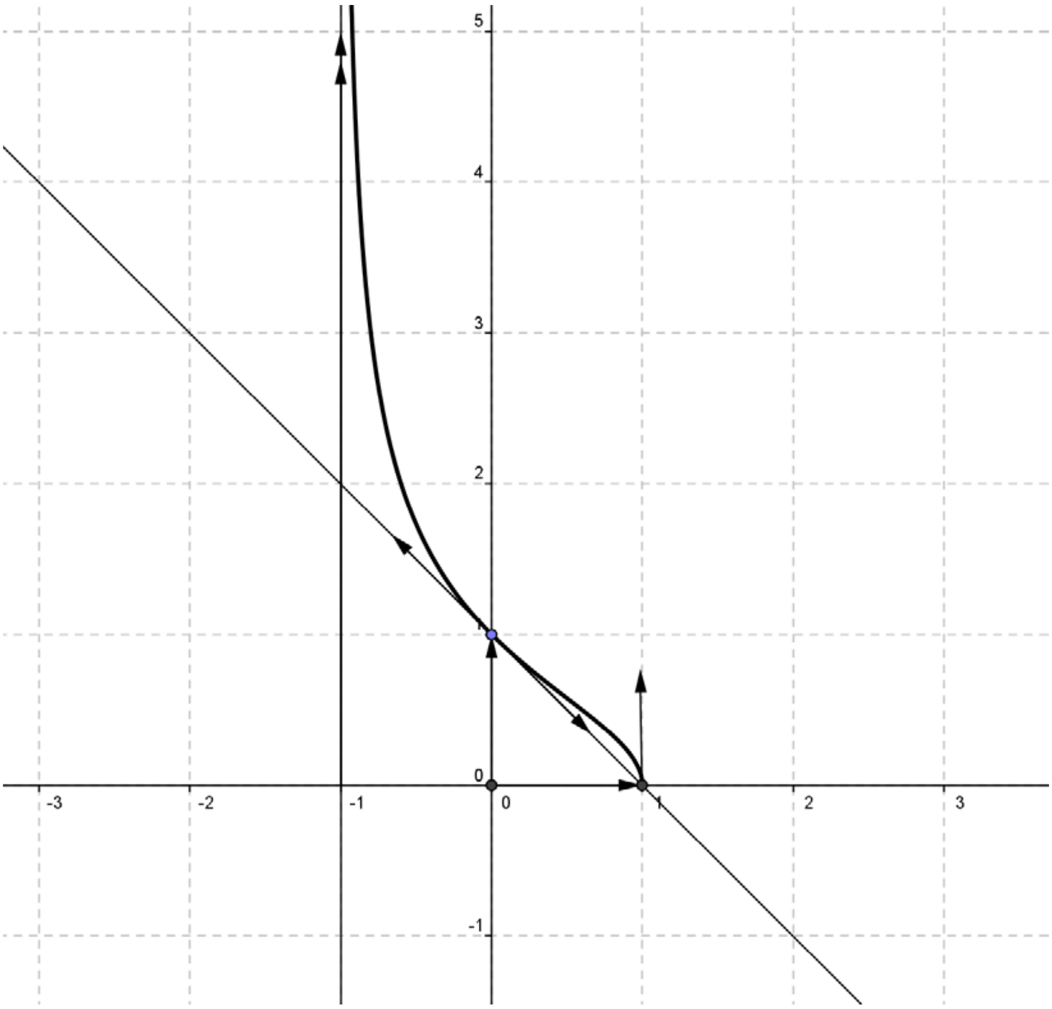
a) Montrer que pour tout n ∈ É , $|u_{n+1} - \alpha|$ Â $\frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

b) En déduire que pour tout n ∈ É , $|u_n - \alpha|$ Â $\left(\frac{1}{2}\right)^n |2 - \alpha|$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

❖ Exercice N° 4 : (4 points)

La figure ci-dessous est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f définie sur]-1 , 1]. Sur cette courbe on a indiqué la tangente à ζ_f au point d'abscisse 0 , la demi-tangente au point d'abscisse 1 et l'asymptote verticale .



En utilisant le graphique :

1) Donner f(0), f(1), $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x - 1}$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que l'équation f(x) = x admet une unique solution α dans]0 , 1[

4) On donne pour tout x ∈]-1 , 1[, $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{1 - x^2}}$. Soit g la fonction définie sur]0 , π[par

g(x) = f(cos x). Montrer que g est dérivable sur]0 , π[et calculer g'(x).