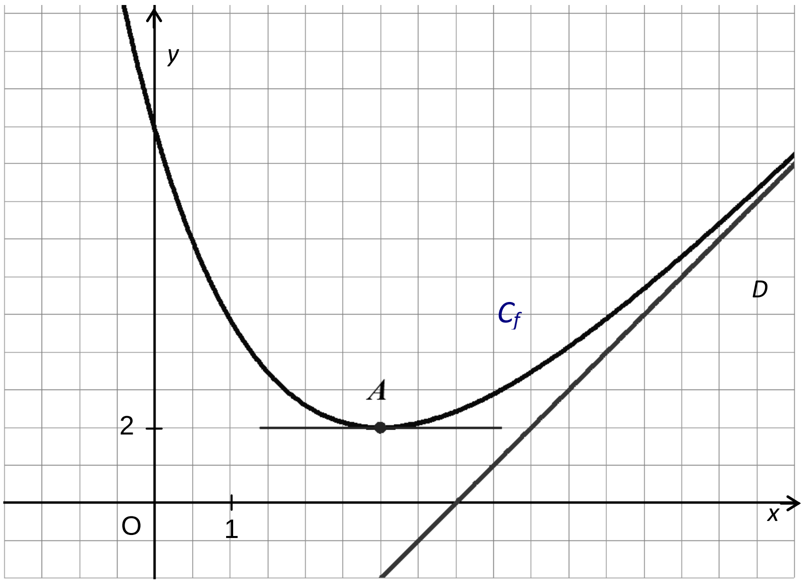
Exercice 1 (4 points)

Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On sait que la droite D d'équation $y = 2x - 8$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$, que la courbe C_f admet branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $-\infty$ et qu'elle passe par le point $A(3;2)$;



Répondre par **Vrai** ou **Faux** à chaque proposition ci-dessous:

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$; d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)-2x} = \dfrac{1}{8}$

   e) f(1) = 2,5 ; f) $f(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$.

2) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

   a) $h \circ f(3) = 1$; b) $\lim\limits_{x\to3} h \circ f(x) = 0$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} h \circ f(x) = +\infty$;

   d) l'équation h(x) = 1 admet une unique solution réelle.

Exercice 2 (6 points)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur l'intervalle [0, 1] par : $f_n(x) = x^3 - 2nx + 1$.

1. Montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur [0, 1].

2. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n dans l'intervalle [0, 1].

3. Donner un encadrement de a_2 d'amplitude 10^{-1} .

4. a) Calculer $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$ puis montrer que, pour tout n , $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$.

   b) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $a_n \leq \frac{1}{n}$.

   c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3 (4 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 5 - i\sqrt{3}$ et $z_B = 4 + 2i\sqrt{3}$. On note Q le milieu du segment [OB].

1. Déterminer l'affixe z_Q du point Q et l'affixe z_K du point K tel que ABQK soit un parallélogramme.

2. a) Démontrer que $\frac{z_K - z_A}{z_K}$ est imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour le triangle OKA ?

   b) Préciser la nature du quadrilatère OQKA.

3. Soit C le point d'affixe $z_K = \frac{2}{3} z_A$. Calculer $\frac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?

Exercice 4 (6 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1cm), placer les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = -4 + 4i$ et $c = -4i$

1. a) Ecrire chacun des nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.
   b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

2. On désigne par A' , B' et C' les points d'affixes respectives a' ; b' et c' définie par :
$a' = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = 4\sqrt{2}e^{i\frac{13}{12}}$ et $c' = -4ie^{i\frac{\pi}{3}}$

   a) Etablir que $b' = -2\left(1 + \sqrt{3}\right) + 2\left(1 - \sqrt{3}\right)i$.

   b) Ecrire a' et c' sous forme algébrique.

3. a) Déterminer les affixes p, q et r des points P, Q et R milieux des segments [A'B] , [B'C] et [C'A].

   b) Démontrer que $r - p = e^{i\frac{\pi}{3}}(q - p)$. En déduire la nature du triangle PQR.