

## Devoir de contrôle n°1

### EXERCICE N°1

**A)** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$  On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**1.a)** Etudier les variations de  $f$ .

b) Etudier la position de la courbe  $(C)$  par rapport à sa tangente  $T$  au point d'abscisse 0.

**2.a)** Montrer que l'équation :  $f(x) = 3x$  admet dans  $[-1, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ .

b) Justifier que  $\alpha \in ]0,1[$ .

**3)** Tracer la courbe  $(C)$ .

**B)**

Soit la fonction  $g$  définie sur  $[-\pi/4, \pi/2]$  par : 
$$\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg}x) & \text{si } x \neq \pi/2 \\ g(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

**1)** Vérifier que pour tout  $x \in [-\pi/4, \pi/2]$  on a :  $g(x) = 1 + \sqrt{2} \cos(x + \pi/4)$

**2)** Etudier les variations de  $g$  et tracer sa courbe dans un repère orthonormé du plan.

**3)** Montrer que  $g$  admet une application réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $I$  que l'on précisera.

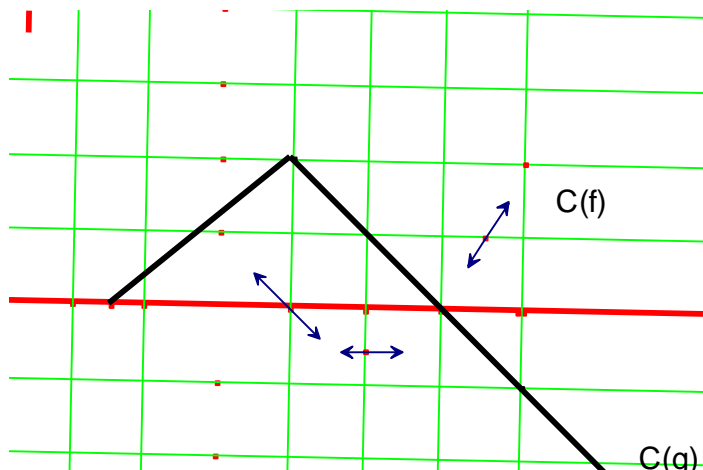
**4)** Etudier la dérivabilité de  $g^{-1}$  sur l'intervalle  $I$  puis calculer  $(g^{-1})'(x)$ .

**5)** Tracer, dans le repère contenant la courbe de  $g$ , celle de  $g^{-1}$ .

### EXERCICE N°2

Deux fonctions  $f$  et  $g$  sont représentées graphiquement ci-dessous :

Montrer que  $g \circ f$  est dérivable aux points d'abscisses 1, 2 et 3 et déterminer les nombres dérivés correspondants.



### EXERCICE N°3

Pour tout nombre complexe  $z \neq 1$  on pose  $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$ , on considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  les points A, B, M et M' d'affixes respectives 1 ; (-1) ;  $z$  et  $z'$

- 1) Montrer que  $|z'| = 1$  et interpréter géométriquement le résultat.
- 2) a) Calculer  $U = \frac{z'-1}{z-1}$  en fonction de  $z$  et  $\bar{z}$   
b) En déduire que U est réel.  
c) Montrer alors que  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AM'}$  sont colinéaires.
- 3) a) Montrer que  $V = \frac{z'+1}{z'-1}$  est imaginaire pur.  
b) En déduire que les vecteurs  $\overrightarrow{AM'}$  et  $\overrightarrow{BM'}$  sont orthogonaux.

### EXERCICE N°4

Soit  $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . On considère l'équation :  $(E_\theta) : Z^2 - (2i + e^{i\theta})Z - 1 + ie^{i\theta} = 0$ .

- 1) Résoudre dans C l'équation  $(E_\theta)$ .
  - 2) On pose  $Z_1 = i + e^{i\theta}$ 
    - a) Prouver que  $Z_1 \cdot e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} = 2\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})$
    - b) En déduire la forme exponentielle de  $Z_1$ .
  - 3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ , on considère les points A, B et C d'affixes respectives :  $e^{i\theta}$  ;  $Z_1$  et  $i$ .
    - a) Prouver que OABC est un losange.
    - b) Montrer que  $OB \cdot AC = 2\cos\theta$
    - c) En déduire  $\theta$  pour que l'aire du losange OABC soit égale à  $1/2$ .
  - 4) Résoudre dans C l'équation  $Z^4 - (2i + 1)Z^2 - 1 + i = 0$ .
- .....

### EXERCICE (supplémentaire)

Soit la fonction f définie sur  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$

- 1) dresser le tableau de variation de f.
- 2) a) Montrer que f réalise une bijection de  $]1, +\infty[$  sur un intervalle J que l'on déterminera.  
b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1, +\infty[$   
c) Vérifier que  $1,44 < \alpha < 2$
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  est équivalente à (E) :  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$  ; pour  $x > 1$
- 4) Soit g la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ 
  - a) Vérifier que  $g(\alpha) = \alpha$
  - b) Montrer que g est bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle K que l'on précisera.
  - c) Calculer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in K$ .